Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I Convergence des séries numériques

1) Définitions

Déf 1 : Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On appelle série de terme général u_n la suite des sommes partielles (S_n) où $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. On la note $\sum_{n \geq 0} u_n$ ou $\sum u_n$.

Exples 2 :
- Séries géométriques : $\sum_{n \geq 0} q^n$ avec si $q \neq 1$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
- Série harmonique : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ avec $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

Déf 3 : On dit que $\sum u_n$ converge si (S_n) converge. On pose alors $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$

Exple 4 : $\sum q^n$ converge ssi $|q| < 1$ et alors $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$

Prop 5 : Si $\sum u_n$ converge alors $u_n \to 0$. La réciproque est fausse.

Déf 6 : Si (u_n) ne tend pas vers 0, on dit que $\sum u_n$ diverge grossièrement (DVG).

Exple 7 : $\sum \cos(n)$ DVG. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, non grossièrement.

Déf 8 : Si $\sum u_n$ converge, on introduit $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ le reste de cette série.

Prop 9 : Si $\sum u_n$ converge, $R_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = S_n + R_n$.

2) Convergence absolue

Th 10 : Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs (SATP).
$\sum u_n$ converge $\iff \exists M \in \mathbb{R} \,/\, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k \leq M$. Dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} u_k$

Cor 11 : Comparaison de SATP : Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux SATP telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$ alors : $\sum v_n$ CV $\Rightarrow \sum u_n$ CV et $\sum u_n$ DV $\Rightarrow \sum v_n$ DV

Th 12 : Critère de Riemann : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ CV $\iff \alpha > 1$

Déf 13 : Soit $\sum u_n$ une série à coefficients dans $\mathbb{K}$.
On dit que $\sum u_n$ converge absolument (CVA) si la série à termes positifs $\sum |u_n|$ CV ie si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} |u_k| \leq M$. Dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} |u_k|$.

Prop 14 : $\sum u_n$ CVA $\iff$ la famille $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable.

Prop 15 : Si $\sum u_n$ CVA alors $\forall \sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$, $\sum u_{\sigma(n)}$ CVA et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$.

DVPT 1
Exple 16 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note r_n la probabilité que deux entiers de $[\![1, n]\!]$ soient 1er entre eux. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $r_n = \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \cdot \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2$. En particulier $r_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2}$.

Th 17 : Si $\sum u_n$ CVA, alors $\sum u_n$ CV et $\left|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$

Prop 18 : Si $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ CVA, alors $\sum v_n$ CVA. De même si $u_n = o(v_n)$ ou $u_n \sim v_n$

Th 19 : Règle de d'Alembert
Soit $\sum u_n$ une série à termes non nuls telle que $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n \to \infty]{} \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.
Si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ DVG ; si $\ell < 1$, alors $\sum u_n$ CVA ; si $\ell = 1$, on ne peut rien dire

DVPT 2
Exple 20 : Soit $\mathbb{P} = (p_n)$ la famille ordonnée des nombres premiers. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n}$ diverge

Exple 21 : Produit eulérien
$\forall s \in \mathbb{C} \,/\, Re(s) > 1$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$ CVA. De plus, $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$.

3) Semi-convergence

Déf 22 : On dit que $\sum u_n$ est semi-convergente si $\sum u_n$ CV mais $\sum |u_n|$ DV.

Th 23 : Théorème de réarrangement de Riemann

Soit $\sum u_n$ une série réelle semi-convergente et $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\exists \sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N}) \,/\, \sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} \to \alpha$

Déf 24 : Une série réelle est dite alternée si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n . |u_n|$ ou $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^{n+1} . |u_n|$

Th 25 : CSSA : Soit $\sum u_n$ une série alternée telle que $(|u_n|)_{n\geq 0}$ est décroissante et $u_n \to 0$ alors $\sum u_n$ converge et la somme est encadrée par deux sommes partielles consécutives. De plus, le reste R_n est du signe de u_{n+1} et $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.

Expl 26 : $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est semi convergente.

Th 27 : Transformation d'Abel

Soit $\sum a_n b_n$ avec : (a_n) décroissante, $a_n \to 0$, et $(B_n) = (\sum_{k=0}^{n} b_k)$ est bornée alors $\sum a_n b_n$ converge.

Expl 28 : $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n}$ CV ; $\forall \theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$ CV

II Comportement asymptotique

1) Comparaison série / intégrale

Th 29 : Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}^{\text{pm}}([n_0;+\infty[, \mathbb{R}^+)$, décroissante

La série de terme général $w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt - f(n)$ est convergente.

En particulier, $\sum_{n\geq n_0} f(n)$ et $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature

Expl 30 : Séries de Bertrand : $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ CV $\iff \alpha > 1$ ou $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta > 1 \end{cases}$.

Prop 31 : $\forall \alpha > 1$, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ et $\forall \alpha < 1$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

2) Sommation des relations de comparaison

Th 32 : Soit $\sum u_n$ une série numérique et $\sum v_n$ une SATP qui converge

- Si $u_n = o(v_n)$ alors $\sum u_n$ CV et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$
- Si $u_n \sim v_n$ alors $\sum v_n$ CV et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$

DVPT 3

Expl 33 : $\exists \gamma > 0$ tel que $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Th 34 : Soit $\sum u_n$ une série numérique et $\sum v_n$ une SATP qui diverge

- Si $u_n = o(v_n)$ alors $\sum_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$
- Si $u_n \sim v_n$ alors $\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$

Expl 35 : Théorème de Cesàro : Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \to \ell \in \mathbb{R}_+^*$

alors $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$

Expl 36 : Soit $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} x_1 = a > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_1 + \dots + x_n} = x_n + \frac{1}{S_n} \end{cases}$

alors (x_n) diverge et $x_n \sim \sqrt{2 \ln n}$

3) Etude de suite

Prop 37 : La suite (u_n) et la série télescopique $\sum u_{n+1} - u_n$ sont de même nature

Exple 38 : Formule de Stirling : $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

III) Calculs et propriétés des sommes

1) Construction de la fonction exponentielle et d'autres nombres

Th 39 : Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ CVA, alors la série de terme général $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ converge absolument et $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right) \times \left(\sum_{k=0}^{+\infty} v_k\right)$

DVPT 4

Appli 40 : Construction de la fonction exponentielle complexe

① $\forall z \in \mathbb{C}$, $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolument. On pose $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$

② $\forall a, b \in \mathbb{C}$, $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$

③ $\exp \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ et $\forall z \in \mathbb{C}$, $\exp'(z) = \exp(z)$

④ $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est surjective

⑤ On pose $e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$. e est irrationnel

Prop 41 : Le nombre de Liouville $\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^{n!}}$ est transcendant

2) Utilisation des séries entières

Exple 42 : $\forall x \in]-1;1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$

DVPT 5

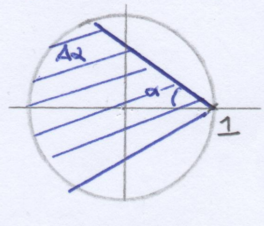
Th 43 : Théorème angulaire d'Abel

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1. On note f sa somme sur $\mathbb{D}$

On suppose que $\sum a_n$ converge. On note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Soit $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}[$. On note $\Delta_\alpha = \{ z \in \mathbb{D} : \exists \rho > 0, \exists \theta \in [-\alpha; \alpha] \,/\, z = 1 - \rho e^{i\theta} \}$

Alors $\lim\limits_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_\alpha}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$.



Exple 44 : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$; $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$

3) Utilisation des séries de Fourier

Th 45 : Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^{1,\text{mor}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $S_n(f)(t) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{2}\left(f(t^+) + f(t^-)\right)$

Exple 46 : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \frac{\pi - 1}{2}$

Prop 47 : La fonction $f : z \mapsto \begin{cases} \frac{z}{e^z - 1} & \text{si } |z| < 2\pi,\ z \neq 0 \\ 1 & \text{si } z = 0 \end{cases}$ est développable en série entière en 0

Déf 48 : On définit les nombres de Bernoulli (b_n) par $f(z) = \frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$

DVPT 6

Th 49 : On a $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = 1 - \frac{z}{2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{z^2 + 4\pi^2 n^2}$

$$= 1 - \frac{z}{2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{2k}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}} \right) z^{2k}$$

Cor 50 : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\zeta(2k) = (-1)^{k-1} \cdot \frac{(2\pi)^{2k}}{2.(2k)!} b_{2k}$. En particulier, $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$; $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$