Théorème de réalisation de Borel

Gourdon

<u>Thm:</u> Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.

Alors il existe une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^∞ tq $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

<u>dém:</u>

① <u>Lemme:</u> Il existe $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ tq $\begin{cases} \forall x \in [-1,1],\ \varphi(x) = 1 \\ \forall x,\ |x| \geq 2,\ \varphi(x) = 0 \end{cases}$

<u>dém:</u> · Posons $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

g est C^∞ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$, $\forall x > 0,\ g^{(n)}(x) = e^{-1/x} P_n\left(\frac{1}{x}\right)$

et donc $g^{(n)}(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$

L'application <u>g est donc C^∞ sur $\mathbb{R}$ et vérifie $g^{(n)}(0) = 0$.</u>

· Posons alors $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$x \mapsto \frac{g(g(1) - g(x))}{g(g(1))}.$$
On a h C^∞ et $\begin{cases} \forall x \leq 0,\ h(x) = 1 \\ \forall x \geq 1,\ h(x) = 0 \end{cases}$ ($g \nearrow$)

Ainsi $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$x \mapsto h(x-1)\,h(-(x+1))$$
convient.

② Posons $\varphi_n(x) = x^n \varphi(x)$ et $M_n = \sup_{k \in [\![0, n-1]\!]} \left(\|\varphi_n^{(k)}\|_\infty \right)$

et posons $\lambda_n = 1 + n^2(1 + |a_n| M_n)$ de sorte que $\begin{cases} \lambda_n \to +\infty \\ \lambda_n \geq 1 \\ \text{et } \sum \dfrac{|a_n| M_n}{\lambda_n} \text{ CV} \end{cases}$

On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \varphi(\lambda_n x)$

(f est bien définie car pour $x \neq 0$ la somme est finie car $|\lambda_n x| \to +\infty$).

On va mq f est une application de la forme recherchée.

Si $p \in \mathbb{N}$, montrons donc que f est C^p et

$$f^{(p)}(x) = \sum_n a_n \lambda_n^{p-n} \varphi_n^{(p)}(\lambda_n x) \quad ⊛$$

⊛ est vérifiée car $\varphi_n(\lambda_n x) = \lambda_n^n x^n \varphi(\lambda_n x)$.

→ pour $p = 0$: De plus on a, $\left|a_n \lambda_n^{-n} \varphi_n(\lambda_n x)\right| \leq \underbrace{\frac{|a_n| M_n}{\lambda_n}}_{\Sigma\, CV}$

donc la série $\sum_n a_n \lambda_n^{-n} \varphi_n(\lambda_n x)$ converge normalement et f est C^0.

→ $p \rightsquigarrow p+1$: $\quad \left|a_n \lambda_n^{p+1-n} \varphi_n^{(p+1)}(\lambda_n x)\right| \leq \underbrace{\frac{|a_n| M_n}{\lambda_n}}_{\Sigma\, CV}$ pour $n \geq p+2$

donc $f^{(p)}$ est C^1 (la série des termes dérivés CVN) et on a ⊛.

Finalement, pour $x \in [-1, 1]$, on a $\varphi_n(x) = x^n$ donc $\varphi_n^{(p)}(0) = \begin{cases} p! & \text{si } n = p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

et $\underline{f^{(p)}(0) = p!\, a_p}$.

Application : Toute fonction C^∞ sur $[a, b]$ (avec des dérivées de tout ordres à droite en a et à gauche en b) peut être prolongée en une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$.

dém : D'après le thm, il existe $u, v \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u^{(k)}(a) = f^{(k)}(a^+) \\ v^{(k)}(b) = f^{(k)}(b^-) \end{cases}$

Alors l'application $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convient.

$$x \longmapsto \begin{cases} u(x) & \text{si } x < a \\ f(x) & \text{si } a \leq x \leq b \\ v(x) & \text{si } x > b \end{cases}$$