leçons :
230 : Séries de nb réels ou complexes
235 : suites et séries de fonctions intégrables
241 : suites et séries de fonctions
246 : Séries de Fourier.

Formule sommatoire de Poisson et application

17

Références :
Gourdon "Analyse"
FGN "Analyse 2"

Notation : Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on pose $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t)\,dt$ (TF de f)

Pré-requis : $\forall \alpha > 0$, si $f(t) = e^{-\alpha t^2}$, on a $\hat{f}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}$

Thm : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ tq $\begin{cases} \text{(i) } \exists M > 0, \exists \alpha > 1, \forall x \in \mathbb{R} \; |f(x)| \leqslant \frac{M}{(1+|x|)^\alpha} \\ \text{(ii) } \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < +\infty \end{cases}$

Alors $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(2\pi n)$

preuve :
On pose $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2n\pi) \end{cases}$

① MQ φ est bien définie.

Pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose $f_n : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x+2n\pi) \end{cases}$. $f_n \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ $\forall n \in \mathbb{Z}$

Soit $K > 0$.

$\forall x \in [-K, K]$ $\quad |f_n(x)| = |f(x+2n\pi)| \leqslant \frac{M}{(1+|x+2n\pi|)^\alpha}$ par (i).

$\forall x \in [-K, K]$ $\forall$ $|2n\pi| \geqslant 2K$ $\quad |f_n(x)| \leqslant \frac{M}{(1+|n\pi|)^\alpha}$ par inégalité triangulaire

$\forall |2n\pi| \geqslant 2K$ $\implies \|f_n\|_{\infty, [-K,K]} \leqslant \frac{M}{(1+|n\pi|)^\alpha}$

Donc les séries $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ et $\sum_{n \geqslant 1} f_{-n}$ convergent normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$ par comparaison avec les séries de Riemann ($\alpha > 1$). D'où φ bien définie, φ continue sur $\mathbb{R}$ et φ 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.

② Calcul des coefficients de Fourier de φ

Soit $m \in \mathbb{Z}$. On a $c_m(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) e^{-imt}\,dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n(t) \right) e^{-imt}\,dt$

La série converge normalement sur $[0, 2\pi]$ donc on peut intervertir $\int$ et Σ.

$$c_m(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} f(t+2n\pi)\, e^{-imt}\, dt \underset{t+2n\pi=u}{=} \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} f(u)\, e^{-im(u-2n\pi)}\, du$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} f(u)\, e^{-imu}\, du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-imu}\, du = \frac{1}{2\pi}\hat{f}(m)$$

3 Conclusion

Par hypothèse (ii) : $\sum_{m\in\mathbb{Z}} |c_m(\varphi)| < +\infty$. Donc $\forall x\in\mathbb{R}$ $\varphi(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m(\varphi)\, e^{imx}$

$x=0$: $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2n\pi) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi}\hat{f}(m)$

Application à la fonction Θ de Jacobi :

On pose $\Theta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x^{n^2}$ et $\theta : \begin{cases}]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x} = \Theta(e^{-\pi x}) \end{cases}$

Alors $\forall x>0$ $\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\,\theta\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\Theta(y) \underset{\substack{y\to 1\\ y<1}}{\sim} \frac{\pi}{\sqrt{1-y}}$

preuve :

On fixe $x>0$ et on pose $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{-\frac{t^2 x}{4\pi}} \end{cases}$

- f vérifie (i) par croissance comparée.
- $\hat{f}(u) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\frac{u^2}{4\alpha}}$ avec $\alpha = \frac{x}{4\pi}$, $\hat{f}(u) = \frac{2\pi}{\sqrt{x}}\, e^{-\frac{\pi u^2}{x}}$

donc $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < +\infty$

On applique la formule sommatoire de Poisson : $2\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2n\pi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)$

$$2\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{4\pi^2 n^2 x}{4\pi}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{2\pi}{\sqrt{x}}\, e^{-\frac{\pi n^2}{x}} \quad \text{ie} \quad \theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\,\theta\left(\frac{1}{x}\right) \; (*)$$

- $x \mapsto e^{-\pi x}$ est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]0,1[$

$\forall x>0$ on pose $y = e^{-\pi x}$, on a $-\pi x = \ln y$

Par $(*)$, $\Theta(y) = \theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\,\theta\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-\ln y}}\,\Theta\left(e^{\frac{\pi^2}{\ln y}}\right)$

D'où $\Theta(y) \underset{\substack{y\to 1\\ y<1}}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-y}}$ $\quad (\Theta(0)=1)$