Yo tout l'monde c'est Maïté
aujourd'hui on s'retrouve
pour un nouveau
DÉVELOPPEMENT !

Menu du Jour

Pour tout $n \geq 5$,
$\mathfrak{A}_n$ est simple

Bon Appétit !

Théorème : Pour tout $n \geq 5$, $\mathfrak{A}_n$ est simple.

Preuve. • Cas $n = 5$:
Le groupe $\mathfrak{A}_5$ à 60 éléments est composé de :
- 1 élément d'ordre 1 (l'identité)
- $\binom{5}{4} \times 3 = 15$ éléments d'ordre 2 (bitranspositions)
- $\binom{5}{3} \times 2 = 20$ éléments d'ordre 3 (3-cycles)
- $4! = 24$ éléments d'ordre 5 (5-cycles).

On a admis que les 3-cycles sont conjugués dans $\mathfrak{A}_5$ et on voit facilement qu'il en est de même des bi-transpositions : si $\tau = (ab)(cd)$ et $\tau' = (a'b')(c'd')$, $\exists \sigma \in \mathfrak{S}_5$ telle que $\sigma(a) = a'$, $\sigma(b) = b'$ et $\sigma(e) = e'$:
-si $\sigma \in \mathfrak{A}_5$, on a $\tau' = \sigma\tau\sigma^{-1}$ dans $\mathfrak{A}_5$: c'est gagné !
-sinon, en posant $\sigma' = (cd)$, on a alors $\sigma\sigma' \in \mathfrak{A}_5$ car $\varepsilon(\sigma\sigma') = 1$, et ainsi $\tau' = (\sigma\sigma')\tau(\sigma\sigma')^{-1}$ dans $\mathfrak{A}_5$.
Soit $H \triangleleft \mathfrak{A}_5$ non trivial : si H contient un élément d'ordre 2 ou 3, alors ils les contient tous par ce qui précède. De plus, s'il contient un élément d'ordre 5, il contient le 5-Sylow engendré par cet élément et ainsi tout 5-Sylow par conjugaison, donc H contient à fortiori tout élément d'ordre 5 de $\mathfrak{A}_5$.
Mais H contient au moins 2 types de tels éléments car ni 16=15+1, ni 21=20+1, ni 25=24+1 ne vont diviser 60 (on sait que $\#H \mid \#\mathfrak{A}_5$).
Ainsi, on a nécessairement $\#H \geq 15 + 20 + 1 = 36$, et par conséquent $\#H = 60$, d'où $H = \mathfrak{A}_5$.
Rq : Les 24 éléments d'ordre 5 (les 5-cyles) ne sont pas conjugués dans $\mathfrak{A}_5$, car sinon ils formeraient une orbite et on aurait donc $24 \mid 60$.

• Cas $n > 5$:
Dans toute la suite, on note $E = [\![1; n]\!]$.
Soit $H \triangleleft \mathfrak{A}_n$ non trivial ($H \neq \{id\}$) et soit $\sigma \in H$ avec $\sigma \neq id$: il existe $a \in E$ tel que $b := \sigma(a) \neq a$.
Soit $c \in E \backslash \{a, b, \sigma(b)\}$, soit $\tau = (a\ c\ b)$ de manière à ce que $\tau^{-1} = (a\ b\ c)$ et soit $\rho = [\tau, \sigma]$ le commutateur de τ et σ, défini par
$$\rho = \tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1} = (a\ c\ b)(\sigma(a)\ \sigma(b)\ \sigma(c)).$$
Or, $H \triangleleft \mathfrak{A}_5$ donc $\rho = (\tau\sigma\tau^{-1})\sigma^{-1} \in (\tau H \tau^{-1})H = H$.
Soit $F = \{a, b, c, \sigma(a), \sigma(b), \sigma(c)\}$: comme $b \neq \sigma(a)$, l'ensemble F a au plus 5 éléments. Remarquons de plus que $\rho_{|(E\backslash F)} = id_{|(E\backslash F)}$ et que $\rho(F) = F$.
Quitte à rajouter des éléments à F, on peut suppositoire -ser que $\#F = 5$; notons aussi que $\rho \neq id$ car $\rho(b) = \tau\sigma(b) \neq b$ (on a $\sigma(b) \neq \tau^{-1}(b) = c$).
Considérons $\mathfrak{A}(F)$: on a $\mathfrak{A}(F) \simeq \mathfrak{A}_5$, et on dispose alors du plongement $i : u \in \mathfrak{A}(F) \mapsto \overline{u} \in \mathfrak{A}_n$ qui est un morphisme de groupes et qui est tel que l'on a $\overline{u}_{|F} = u$ et $\overline{u}_{|(E\backslash F)} = id_{|(E\backslash F)}$.
Posons $H_0 = i^{-1}(H) = \{u \in \mathfrak{A}(F) \mid \overline{u} \in H\}$: on a clairement $H_0 \triangleleft \mathfrak{A}(F) \simeq \mathfrak{A}_5$, et comme $\rho_{|F} \in H_0$ et $\rho_{|F} \neq id$, on a $H_0 = \mathfrak{A}(F)$ par simplicité de $\mathfrak{A}_5$.
Soit donc u un 3-cyle de $\mathfrak{A}(F)$: alors $u \in H_0$ et on a $\overline{u} \in H$ qui est aussi un 3-cycle. Or, on sait que les 3-cycles sont conjugués dans $\mathfrak{A}_n$ pour $n \geq 5$ et qu'ils engendrent $\mathfrak{A}_n$ pour $n \geq 3$: ainsi, $H = \mathfrak{A}_n$.
CQFD, Bécasse !

Bonus

On démontre les résultats utilisés.

• Lemme : Pour $n \geq 3$, le groupe $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les 3-cycles.

Preuve. Si $n \geq 3$, les 3-cycles sont bien dans $\mathfrak{A}_n$ car on a $(i\ j\ k) = (i\ j)(j\ k)$ qui est de signature -1. Remarquons de plus que tout $\sigma \in \mathfrak{A}_n$ va s'écrire comme produit pair de transpositions $\sigma = \tau_1 ... \tau_{2k}$ puisqu'il est de signature 1 : il suffit donc de montrer ~~sa bite~~ que les bitranspositions s'écrivent comme produit de 3-cycles.

Soient $i, j, k, l \in [\![1, n]\!]$ et $\tau = (i\ j)$, $\tau' = (k\ l)$:

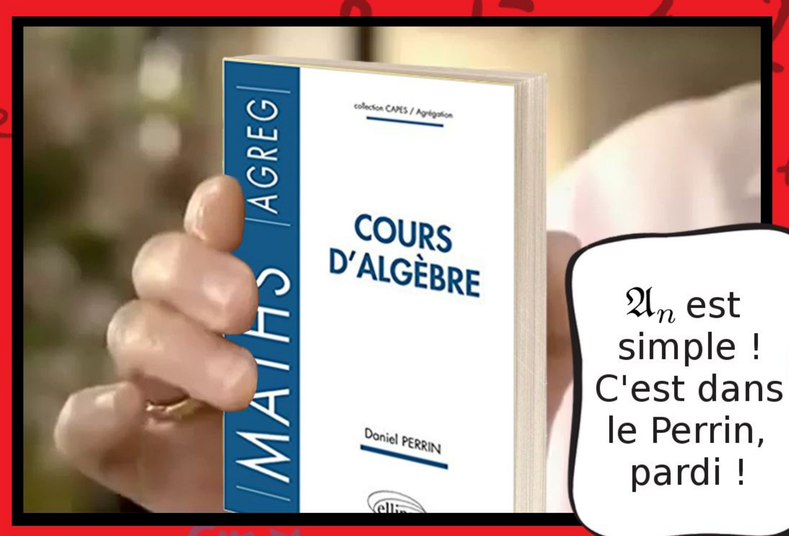
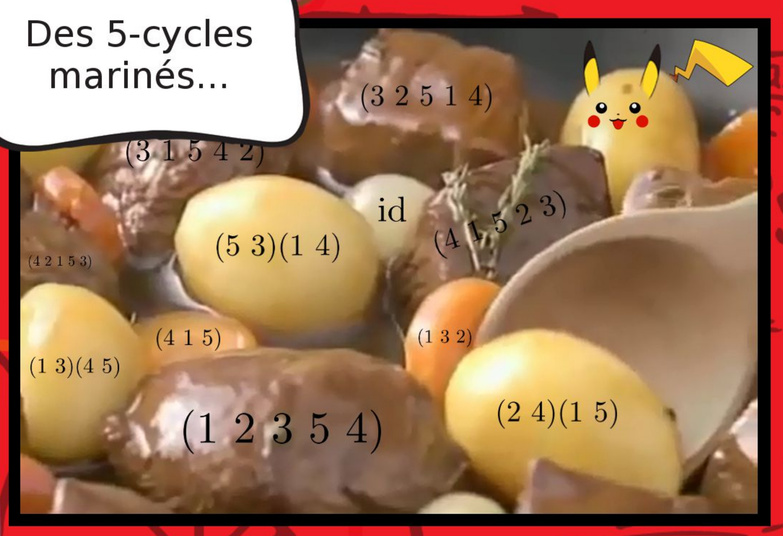
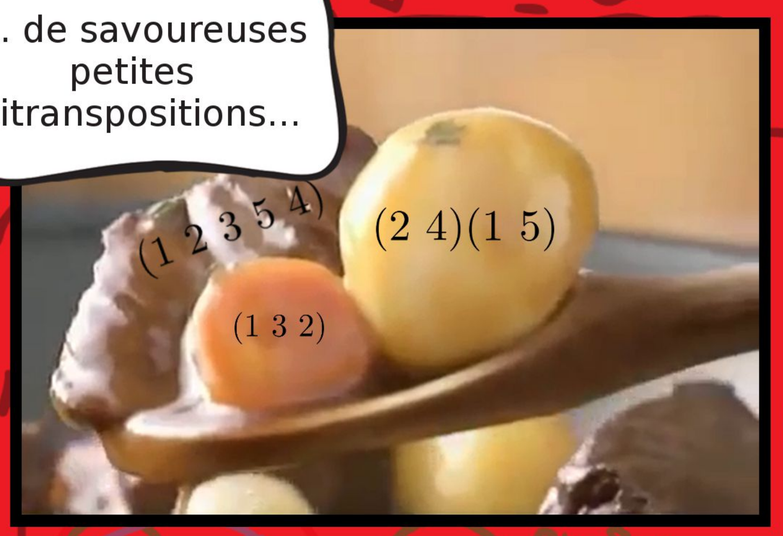
- si $supp(\tau) = supp(\tau')$, $\tau\tau' = id$
- si $\#supp(\tau) \cap supp(\tau') = 1$, $\tau\tau'$ est un 3-cycle
- sinon, $\tau\tau' = (i\ j)(j\ k)(j\ k)(k\ l) = (i\ j\ k)(j\ k\ l)$.

• Lemme : Pour $n \geq 5$, les 3-cyles sont conjugués dans le groupe $\mathfrak{A}_n$.

Preuve. Soient $(i_1\ i_2\ i_3), (j_1\ j_2\ j_3) \in \mathfrak{S}_n$.

Or, comme les 3-cycles sont conjugués dans $\mathfrak{S}_n$, il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que $(j_1\ j_2\ j_3) = \sigma(i_1\ i_2\ i_3)\sigma^{-1}$:

- si $\sigma \in \mathfrak{A}_n$, c'est gagné
- sinon, soient $k, l \in [\![1, n]\!] \backslash \{i_1, i_2, i_3\}$: on a alors $\sigma' := \sigma(k\ l) \in \mathfrak{A}_n$ et $(j_1\ j_2\ j_3) = \sigma'(i_1\ i_2\ i_3)\sigma'^{-1}$.

LES AVENTURES DE MAÏTÉ

ÉPISODE 1 : L'INVITÉ SURPRISE