leçons :
143 : Résultant
152 : Déterminant.

Formule de Poisson (résultant) et application (52)

Référence :
APERY p.16 et p.39

Thm: Soit A un anneau (commutatif) intègre. Soit $P(X) = \sum_{i=0}^{p} a_i X^i \in A[X]$ avec $a_p \in A^\times$ et $Q(X) = \sum_{i=0}^{q} b_i X^i \in A[X]_{\leqslant q}$. On note $g : \begin{cases} \frac{A[X]}{(P)} \longrightarrow \frac{A[X]}{(P)} \\ \overline{R} \longmapsto \overline{QR} \end{cases}$ g est une application linéaire entre A-modules libres

g endom de A-modules libres

Alors $\det(g) = a_p^{-q} \operatorname{Res}_{p,q}(P,Q)$ q a_p ?

__preuve :__
- On pose $\phi : \begin{cases} A[X]_{\leqslant q-1} \times A[X]_{\leqslant p-1} \longrightarrow A[X]_{\leqslant p+q-1} \\ (U, V) \longmapsto UP + VQ \end{cases}$

On munit $\begin{cases} A[X]_{\leqslant p+q-1} \text{ de la base } (X^{p+q-1}, \dots, X, 1) \\ A[X]_{\leqslant q-1} \times A[X]_{\leqslant p-1} \text{ de la base } ((X^{q-1},0), \dots, (X,0), (1,0), (0,X^{p-1}), \dots, (0,X), (0,1)) \end{cases}$

Dans ces bases, $\operatorname{Res}_{(p,q)}(P,Q) = \det \phi = \begin{vmatrix} a_p & & (0) & b_q & & (0) \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ a_0 & & a_p & & & b_q \\ & \ddots & \vdots & b_0 & & \vdots \\ (0) & & a_0 & (0) & & b_0 \end{vmatrix}$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{q} \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{p}$$

- Pour tout $j \in [\![0, p-1]\!]$, on fait la division euclidienne de $X^j Q$ par P :

$(*)$ $X^j Q = q_j P + r_j$ avec $r_j \in A[X]_{\leqslant p-1}$, $q_j \in A[X]_{\leqslant q-1}$

On peut le faire car le coefficient dominant de P est inversible.

- L'expression $(*)$ se réinterprète en disant que la colonne $\phi((0, X^j))$ est somme d'une combinaison linéaire des q première colonnes et du vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r_{j,p-1} \\ \vdots \\ r_{j,0} \end{pmatrix}$

où $r_j(X) = \sum_{i=0}^{p-1} r_{j,i} X^i$

Donc, en faisant des opérations sur les colonnes :

$$\operatorname{Res}_{(p,q)}(P,Q) = \left|\begin{array}{ccc:ccc} a_p & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & (0) & \\ a_0 & & a_p & & & \\ \hdashline & \ddots & \vdots & r_{p-1,p-1} & \dots & r_{0,p-1} \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & a_0 & r_{p-1,0} & \dots & r_{0,0} \end{array}\right| \begin{array}{l} \updownarrow q \\ \\ \updownarrow p \end{array} = (a_p)^q \det K$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{q}$$

où K est le bloc inférieur droit

- Lien avec g :

on quotiente dans $(*)$: $\overline{X^{\partial} Q} = \overline{1 j}$

On munit $\frac{A[X]}{(P)}$ de la base $(\overline{X^{p-1}}, \dots, \overline{X}, \overline{1})$

Dans cette base $\det g = \det K$ □

Application: Si $X^{p}-1$ est scindé sur A : $X^{p}-1 = \prod_{i=1}^{p} (X - \xi_i)$, $\xi_i \in A$

et $Q(X) = \sum_{i=0}^{p-1} b_i X^i$. Alors $\sum_{i=1}^{p} Q(\xi_i) = p\,Q(0)$

b_{p-1} ?

preuve:

On considère $T - Q(X) \in A[T][X]$. $Q(X)-T = (b_0 - T) + b_1 X + \dots + b_{\underset{p-1}{q}} X^q$

D'après la formule de Poisson : $\mathrm{Res}_{(p,q)}(X^{\overset{p-1}{p}}-1, Q(X)-T) = \begin{vmatrix} b_0-T & b_1 & \cdots & b_{q-1} & b_{p-1} \\ b_{p-1} & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & b_0-T & b_1 \\ b_1 & \cdots & & b_{p-1} & b_0-T \end{vmatrix}$

on pose $C = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{p-1} \\ b_{p-1} & b_0 & \cdots & b_{q-1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_0 \end{pmatrix}$

On a $\mathrm{Res}_{(p,p-1)}(X^n-1, Q(X)-T) = \det(C - T I_p) = \chi_C(T)$

$$\chi_C(T) = \mathrm{Res}_{(p,p-1)}(X^p-1, Q(X)-T) = \prod_{i=1}^{p} \mathrm{Res}_{(p,p-1)}(X-\xi_i, Q(X)-T)$$

$$= \prod_{i=1}^{p} (Q(\xi_i) - T)$$

On identifie les coefficients devant T^{p-1} : $(-1)^{p-1} \sum_{i=1}^{p} Q(\xi_i) = (-1)^{p-1} \mathrm{Tr}\, C$

D'où $\sum_{i=1}^{p} Q(\xi_i) = \mathrm{Tr}\, C = p\, b_0 = p\, Q(0)$

Reformulation plus claire; B anneau commutatif unitaire intègre

$X^p - 1 \in B[X]$ scindé, $X^p - 1 = \prod_{i=1}^{p} (X - \xi_i)$

$Q(X) = \sum_{i=0}^{p-1} b_i X^i \in B_{\leq p-1}[X]$. Alors $\sum_{i=1}^{p} Q(\xi_i) = p\, Q(0)$

preuve; On pose $A = B[T]$

$P = X^p - 1 \in A[X]$

$Q(X) - T \in A[X]$ $\quad Q(X) - T = b_0 - T + b_1 X + \dots + b_{p-1} X^{p-1}$

On applique le lemme de Poisson avec $g : \begin{cases} \frac{A[X]}{(P)} \longrightarrow \frac{A[X]}{(P)} \\ \overline{R} \longmapsto \overline{(Q(X)-T) R} \end{cases}$

mat g ds la base $(X^{p-1}, \dots, X, 1)$ est $\begin{pmatrix} b_0-T & \cdots & b_{p-2} & b_{p-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & b_0-T & b_1 \\ b_{p-1} & \cdots & b_{p-1} & b_0-T \end{pmatrix}$ $\det g = \chi_C(T)$ □