

28 Algorithme de décomposition de Dunford

Ref : Risler

THÉOREME 28.1 Soit $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C})$, $P = \prod_{\lambda \in \text{spec}(A)} (X - \lambda)$. On construit la suite :

$$A_0 = 0, \quad A_{k+1} = A_k - P(A_k)P'(A_k)^{-1}$$

La suite est bien définie et stationne en D matrice diagonalisable qui est un polynôme en A , et telle que $A - D$ est nilpotente.

PREUVE.

idée : la partie diagonalisable de A est un polynôme en A et son polynôme minimal est P . Dans le sous-espace $\mathbb{C}[A]$, une matrice annulée par P est diagonalisable avec des valeurs propres incluses dans celle de A . On s'inspire de la méthode de Newton pour trouver un zéro de P dans $\mathbb{C}[A]$, on tombe alors sur D .

LEMME 28.2 Soit $U \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$, N nilpotente et $NU = UN$, alors $U - N \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$.

PREUVE. On écrit :

$$I_n = I_n - (U^{-1}N)^n = (I_n - U^{-1}N)(I_n + \dots + (U^{-1}N)^{n-1})$$

Donc $I_n - U^{-1}N$ est inversible et $U - N$ également. $\square$

1ère étape :

$$A_k \in \mathbb{C}[A], \exists B_k \in \mathbb{C}[X] \mid P(A_k) = P(A)^{2^k} B_k(A) \text{ et } P'(A_k) \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$$

Par récurrence sur k :

Pour $k = 0$, $A_0 = A \in \mathbb{C}[A]$, $P(A_0) = A$ et comme $P \wedge P' = 1$, par Bezout, $UP + VP' = 1$ et en évaluant en A , on trouve : $V(A)P'(A) = I_n - U(A)P(A)$. Or $U(A)P(A)$ est nilpotente car $\chi_A \mid P^n$. Donc $P'(A) \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ par le lemme précédent et on sait aussi que c'est un polynôme en A (il suffit pour cela d'avoir un polynôme annulateur avec un terme constant non nul).

Pour passer de k à $k + 1$, on écrit la formule de Taylor pour les polynômes :

$$P(X + Y) = P(X) + YP'(X) + Y^2Q(X, Y)$$

On l'applique en $X = A_k$ et $Y = -P(A_k)P'(A_k)^{-1}$:

$$P(A_{k+1}) = P(A_k) - P(A_k)P'(A_k)^{-1}P'(A_k) + P(A_k)^2P'(A_k)^{-2}Q(A_k, Y) = P(A)^{2^{k+1}}B_{k+1}(A)$$

avec $B_{k+1} \in \mathbb{C}[X]$.

$P'(A_{k+1})$ est encore inversible par le lemme argument que pour $k = 0$ puisque $P(A_{k+1})$ est nilpotente. Cela achève la récurrence.

2ème étape :

Si $2^k \geq n$, $P(A_k) = 0$, donc $A_{k+1} = A_k$ et la suite stationne en une matrice notée D . On a $P(D) = 0$, donc D est diagonalisable et c'est un polynôme en A .

$$A - D = A_0 - A_{k+1} = \sum_{i=0}^k P(A_i)P'(A_i)^{-1}$$

chaque terme de la somme est nilpotent et les matrices commutent entre elles, donc $A - D$ est nilpotente. $\square$

Remarque : Le polynôme P se calcule sans avoir besoin des valeurs propres car c'est $\frac{\chi}{\chi \wedge \chi'}$. La preuve marche pour un sous-corps de $\mathbb{C}$ en remplaçant diagonalisable par diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Leçons concernées : polynômes d'endo, endo diag, endo trig et nilpotent.