leçons :	Théorème d'inversion locale	Références :
214 : TIL, TFI 215 : applicat° diff 205 : espaces complets 206 : Thm de points fixes	(11)	Lafontaine Rouvière Cartan

Thm : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^1$ et $a \in \mathbb{R}^n$.
Si $Df(a)$ est inversible, alors $\exists\, V$ voisinage de a tq
(i) $W = f(V)$ est ouvert
(ii) $f_{|V} : V \to W$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme

preuve :

① **Réduction du problème**

Les translations et $Df(a)$ sont des $\mathcal{C}^1$-difféo donc on peut supposer $a = 0$, $f(0) = 0$ et $Df(0) = id$ (quitte à composer f par $Df(0)^{-1}$)

② **Mise sous forme d'un problème de point fixe**

lemme (Thm du point fixe à paramètres) [à mettre dans le plan]
Soit T un espace métrique et X un espace métrique complet.
Soit $\tilde{h} : \begin{cases} T \times X \to X \\ (t, x) \mapsto \tilde{h}_t(x) \end{cases}$ $\mathcal{C}^0$ tq $\exists k \in]0,1[$ $\forall t \in T$ $h_t : X \to X$ soit k-lip$^{\text{une}}$
Alors $\forall t \in T$ $\exists !\, g(t) \in X \mid \tilde{h}_t(g(t)) = g(t)$ et $g : T \to X$ est $\mathcal{C}^0$.

- Soit $h : \begin{cases} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ (y, x) \mapsto x + y - f(x) = h_y(x) \end{cases}$ $\quad h$ $\mathcal{C}^1$ et $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \left[h_y(x) = x \Leftrightarrow f(x) = y \right]$

$\begin{cases} \forall y, x \in \mathbb{R}^n \quad dh_y(x) = Id - Df(x) \quad \text{et} \quad Id - Df(x)\big|_{x=0} = 0 \\ \text{De plus } GL(\mathbb{R}^n) \text{ est ouvert,} \end{cases}$

donc $\exists r > 0$ $\forall x \in B'(0,r)$ $\forall y \in \mathbb{R}^n$ $\|Dh_y(x)\| \leq \frac{1}{2}$ et $Df(x)$ inversible

- $\forall y \in B'(0, \frac{1}{2}r)$ $\forall x \in B'(0,r)$
$$\|h_y(x)\| \leq \|h_y(x) - h_y(0)\| + \|h_y(0)\| \leq \frac{1}{2}\|x\| + \|y\| \quad \text{(TAF)} \leq r$$

Soit $\tilde{h} : \begin{cases} B'(0, \frac{1}{2}r) \times B'(0,r) \to B'(0,r) \\ (y, x) \mapsto h_y(x) \end{cases}$. $B'(0,r)$ est complet et $\tilde{h}$ vérifie les hypothèse du lemme donc $\forall y \in B'(0, \frac{1}{2}r)$ $\exists !\, g(y) \in B'(0,r)$ $f(g(y)) = y$
et $g : B'(0, \frac{1}{2}r) \to B'(0,r)$ est $\mathcal{C}^0$.

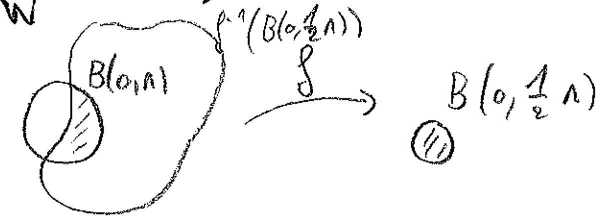
③ <u>Construction des ouverts.</u>

On pose $W = B(0,\frac{1}{2}r)$. Soit $y \in B(0,\frac{1}{2}r)$ $\exists r' < r$ $y \in B'(0,\frac{1}{2}r')$

on applique le résultat précédent avec r' : $\exists!\, x \in B'(0,r') \subset B(0,r)$

$f(x) = y$ par unicité $x = g(y)$

D'où $g_{|W} : B(0,\frac{1}{2}r) \longrightarrow B(0,r) \cap f^{-1}(B(0,\frac{1}{2}r)) := V$



$\forall y \in B(0,\frac{1}{2}r)$ $\exists!\, x \in B(0,r) \cap f^{-1}(B(0,\frac{1}{2}r))$ $f(x) = y$

donc $f_{|V} : V \to W$ est bijective, $\mathcal{C}^1$, d'inverse $\mathcal{C}^0$

et partout de différentielle inversible

④ <u>lemme</u> [écrit dans le plan] : Soit $f : V \to W$ $\mathcal{C}^1$, homéomorphisme tq $\forall x \in V$ $Df(x)$ est inversible. Alors $g = f^{-1}$ est $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall y \in W : \quad Dg(y) = (Df(g(y)))^{-1}$$

preuve du lemme : Soit $a \in V$, $b = f(a)$, $g = f^{-1}$

$\forall h$ petit $\quad g(b+h) = g(b) + \Delta(h)$ où $\Delta(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

$$\cancel{b} + h = f(g(b) + \Delta(h)) = \cancel{b} + Df(a)\cdot\Delta(h) + \|\Delta(h)\|\,\varepsilon(\Delta(h))$$

où $\varepsilon \to 0$

$Df(a)$ inversible : $\quad Df(a)^{-1}\cdot h = \Delta(h) + \|\Delta(h)\|\, Df(a)^{-1}\cdot \varepsilon(\Delta(h))$ (∗)

$$\|\Delta(h)\| \leq \|Df(a)^{-1}\|\cdot\|h\| + \|\Delta(h)\|\,\|Df(a)^{-1}\|\,\|\varepsilon(\Delta(h))\|$$

$\forall h$ petit $\quad \|\Delta(h)\| \leq \dfrac{\|Df(a)^{-1}\|}{1 - \|Df(a)^{-1}\|\,\|\varepsilon(\Delta(h))\|}\cdot\|h\|$

d'où $\quad \|\Delta(h)\| = \underset{h\to 0}{O}(\|h\|)$

Par (∗) $\quad \Delta(h) = Df(g(b))^{-1}\cdot h + o(\|h\|)$

D'où $\forall b \in W \quad Dg(b) = Df(g(b))^{-1} \quad Dg\ \mathcal{C}^0,\ g\ \mathcal{C}^1$ □