Equation fonctionnelle de ζ

Réf : - Edwards, Riemann's zeta Function (p 15)
- Quéffelec - Zuily

Lemme [à mettre dans le plan] : On définit pour $x>0$, $\psi(x) = \sum_{n\geq 1} e^{-\pi n^2 x}$

Alors ψ vérifie l'équation fonctionnelle

$$\forall x>0 \quad \frac{2\psi(x)+1}{2\psi(\frac{1}{x})+1} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Ce qui se récrit en, $\forall x>0 \quad \psi\left(\frac{1}{x}\right) = x^{1/2}\psi(x) + \frac{1}{2}x^{1/2} - \frac{1}{2}$

dém : Formule sommatoire de Poisson

Prop (à mettre dans le plan) : La fonction Γ se prolonge analytiquement à $\mathbb{C}\setminus(-\mathbb{N})$. Les entiers négatifs sont des pôles simples

dém On utilise l'équation fonctionnelle de Γ : $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$

$$\Rightarrow \quad \Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+n+1)}{\prod_{k=0}^{n}(s+k)} \quad \text{définit } \Gamma \text{ sur } \{s\in\mathbb{C} \mid Re(s) > -(n+1)\}\setminus(-\mathbb{N})$$

Thm : La fonction $\zeta : s \mapsto \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$ $(Re(s)>1)$ admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ et vérifie :

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \int_1^{+\infty}\psi(x)\left[x^{-s/2} + x^{\frac{1-s}{2}}\right]\frac{dx}{x} - \frac{1}{s(1-s)} \qquad (*)$$

En particulier, on a : $\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{\frac{-(1-s)}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)$

dém. Soit $s\in\mathbb{C}$ tel que $\sigma = Re(s) > 1$

On a $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\frac{s}{2}-1}dt = \int_0^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}x^{\frac{s}{2}}(\pi n^2)^{s/2}\frac{dx}{x}$ $\left(x = \frac{t}{\pi n^2}, n\in\mathbb{N}^*\right)$

Donc $\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\frac{1}{n^s}=\int_0^{+\infty}e^{-\pi n^2x}x^{\frac{s}{2}}\frac{dx}{x}$

En sommant sur n on obtient :

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-\pi n^2x}x^{\frac{s}{2}-1}dx$$

Or $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\int_0^{+\infty}\left|e^{-\pi n^2x}x^{\frac{s}{2}-1}\right|dx=\sum_{n\geq 1}\int_0^{+\infty}e^{-\pi n^2x}x^{\frac{\sigma}{2}-1}dx$

$$=\pi^{-\frac{\sigma}{2}}\Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right)\zeta(\sigma)<+\infty$$

On peut donc intervertir les signes somme et intégrale :

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\int_0^{+\infty}\psi(x)\,x^{\frac{s}{2}-1}dx$$

$$=\int_0^1\psi(x)\,x^{\frac{s}{2}-1}dx+\int_1^{+\infty}\psi(x)\,x^{\frac{s}{2}-1}dx$$

$y=\frac{1}{x}$
$$=\int_1^{+\infty}\psi\left(\frac{1}{y}\right)y^{-\frac{s}{2}}\frac{dy}{y}+\int_1^{+\infty}\psi(x)\,x^{\frac{s}{2}}\frac{dx}{x}$$

$$=\int_1^{+\infty}\psi(x)\left(x^{\frac{s}{2}}+x^{-\left(\frac{s}{2}+\frac{1}{2}\right)}\right)\frac{dx}{x}+\underbrace{\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{s}{2}}\frac{dx}{x}}_{=-\left(\frac{1}{1-s}+\frac{1}{s}\right)=-\frac{1}{s(1-s)}}$$

D'où $(*)$ pour $\mathrm{Re}(s)>1$.

Or ψ décroît plus vite que n'importe quelle puissance de x. En effet :

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\pi n^2x}\leq\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\pi ny}=\frac{e^{-\pi y}}{1-e^{-\pi y}}\leq\frac{1}{1-e^{-\pi}}e^{-\pi y}$$

Donc si $a\leq\sigma\leq b$

$$\left|x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}+x^{\frac{s}{2}-1}\right||\psi(x)|\leq\left(x^{-\frac{a}{2}-\frac{1}{2}}+x^{\frac{b}{2}-1}\right)\frac{e^{-\pi x}}{1-e^{-\pi}}\in\mathcal{L}^1([1;+\infty[)$$

Par le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale, cette intégrale à paramètre définie une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

On en déduit que $s(1-s)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$ admet un prolongement holomorphe à $\mathbb{C}$ et donc que ζ admet une prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$.

Enfin le membre de droite est invariant par changement de s en $1-s$, d'où l'équation fonctionelle par prolongement analytique. $\square$