Menu du Jour

Densité des
polynômes
orthogonaux

Bon Appétit !

Préliminaires

Définition : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
On dit que $\rho : I \to \mathbb{R}$ est une fonction poids si elle est mesurable, strictement positive et vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_I |x|^n \rho(x)\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

Muni du produit scalaire induit par ρ, qui est

$$< f, g >_\rho := \int_I f(x)g(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x,$$

$L^2(I, \rho)$ est un espace de Hilbert ! En appliquant le procédé de Gram-Schmidt à la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient alors une famille orthonormée $(P_n)_n$ de polynômes unitaires tels que $deg(P_n) = n$, que l'on dira associée au poids ρ.

SPOILERS

L'objectif sera de voir que sous une certaine hypothèse, la famille $(P_n)_n$ est de plus totale, ce qui en fera une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$.
On prend $f \in \{P_n\}_n^\perp$ et on procède comme suit :
- on commence par montrer que la transformée de Fourier de la fonction $f\rho\mathbb{1}_I$ est bien définie
- on l'étend à une bande de $\mathbb{C}$
- on montre ensuite qu'elle y est holomorphe, et que ses dérivées s'annulent en 0
- on constate par le principe du prolongement analytique qu'elle est nulle sur cette bande, donc sur $\mathbb{R}$, et on en déduit finalement par injectivité de la transformée de Fourier que $f = 0$.

Théorème : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, ρ une fonction poids et $a > 0$ tels que

$$\int_I e^{a|x|}\rho(x)\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

Alors la famille $(P_n)_n$ associée à ρ est une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$: on a donc

$$\overline{Vect(\{P_n \mid n \in \mathbb{N}\})} = L^2(I,\rho).$$

Preuve. On utilise un résultat élémentaire.

- Lemme : Soient H un espace de Hilbert et F un sev de H : alors $\overline{F} = H \iff F^\perp = \{0\}$.

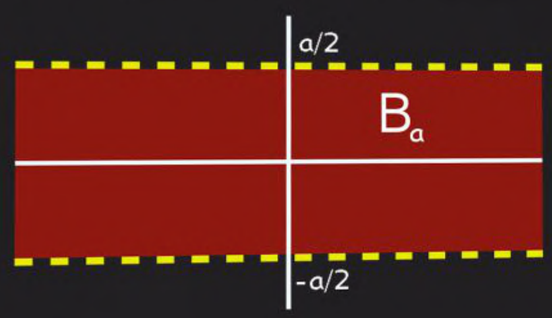
Comme $deg(P_n) = n$, $Vect(\{P_n\}_n) = Vect(\{X^n\}_n)$ donc $\overline{Vect(\{P_n\}_n)} = L^2(I,\rho) \iff \{X^n\}_n^\perp = \{0\}$.
Prenons $f \in \{X^n\}_n^\perp$: $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $< f, X^n >_\rho = 0$.
En remarquant que $t \geq 0 \implies t \leq \frac{1+t^2}{2}$, on a

$$\forall x \in I, |f(x)|\rho(x) \leq \frac{1+|f(x)|^2}{2}\rho(x).$$

Ainsi, $\varphi := f\rho\mathbf{1}_I$ est intégrable car ρ et $f^2\rho$ le sont sur I (ρ est une fonction poids et $f \in L^2(I,\rho)$).
On peut donc considérer la transformée de Fourier de φ, qui est bien définie :

$$\hat{\varphi} : t \in \mathbb{R} \mapsto \int_I e^{-itx} f(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x.$$

On va maintenant montrer que $\hat{\varphi}$ se prolonge sur $B_a = \{z \in \mathbb{C} \mid |Im(z)| < a/2\}$ holomorphiquement.



• Posons $g(z,x) = e^{-izx} f(x)\rho(x) : \forall z \in B_a$, on a

$$\begin{aligned}
\int_I |g(z,x)|\,\mathrm{d}x &\leq \int_I e^{Re(-izx)}|f(x)|\rho(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_I e^{xIm(z)}|f(x)|\rho(x)^{\frac{1}{2}}\rho(x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_I \left(e^{x\frac{a}{2}}\rho(x)^{\frac{1}{2}}\right)\left(|f(x)|\rho(x)^{\frac{1}{2}}\right)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{C-S}}{\leq} \left(\int_I e^{ax}\rho(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_I |f(x)|^2\rho(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_I e^{a|x|}\rho(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_I |f(x)|^2\rho(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \\
&< +\infty \quad \text{par hypothèse.}
\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction

$$F : z \in B_a \mapsto \int_I g(z,x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{C}$$

est bien définie par ce qui précède.

• De plus, F est telle que :

- $\forall z \in B_a$, $z \mapsto g(z,x)$ est mesurable
- $\forall^{\simeq} x \in I$, $z \mapsto g(z,x)$ est holomorphe sur B_a
- $\forall z \in \overline{B_a}$, $|g(z,x)| \leq e^{x\frac{a}{2}}|f(x)|\rho(x)$ qui est intégrable sur I, et on a donc à fortiori cette même domination sur tout compact de B_a.

$\Longrightarrow$ Par le théorème d'holomorphie sous le signe $\int$, F est holomorphe sur B_a et $\forall z \in B_a, \forall n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
F^{(n)}(z) &= \int_I \frac{\partial^n}{\partial z^n}(g(z,x))\,\mathrm{d}x \\
&= (-i)^n \int_I x^n e^{-izx} f(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

En évaluant en 0, on obtient alors

$$\begin{aligned} F^{(n)}(0) &= (-i)^n \int_I f(x)x^n\rho(x)\,\mathrm{d}x \\ &= (-i)^n < f, X^n >_\rho \\ &= 0 \text{ car } f \in \{X^n\}_n^\perp. \end{aligned}$$

• Par unicité du développement en série entière d'une fonction holomorphe, F est nulle sur un voisinage de 0.

Lemme (principe du prolongement analytique) : Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe : si deux fonctions analytiques coïncident sur $D \subset U$, D ayant un point d'accumulation a dans U (c'est-à-dire $a \in \overline{D}$), alors elles sont égales sur U.

Ainsi, B_a étant un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, F est nulle sur B_a tout entier et donc en particulier sur $\mathbb{R}$, d'où

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R},\ \hat{\varphi}(t) &= \int_I e^{-itx} f(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x \\ &= F(t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Comme $\varphi \in L^1(I, \rho)$, on a $\varphi = 0$ par injectivité de la transformée de Fourier : or, $\varphi = f\rho$, et ρ est strictement positive, donc on a $f = 0$.

CQFD, Bécasse !

Moi Maïté, je suis une dure à cuire...

Maïté

Sur la qualité, on me la fait pas !

Alors je compare, je tâte...

Hmmm... Fameux, hé ! Et pourtant, c'était pas le plus dur à trouver !

Et y'a autre chose que je sais choisir...

C'est les développements !

Et ma recette, c'est le nouveau pack Maïté !

Maïté, elle enlève mieux les leçons chiantes de tous les jours que d'autres qui peuvent coûter jusqu'à dix développements supplémentaires !

Et je suis un vrai cauchemar pour les éditeurs...

Entre bibliomaths, gen.lib.rus.ec et les photocopies...

... faudrait me mettre toute entière dans la bibliothèque !

Et même mon tablier Elmer est hyper swag, c'est fou !

Alors, aller faire jusqu'à dix développements de plus que Maïté, et risquer de les retenir moins bien ?

Oh oh, mais dites donc, mais...

.... y'a pas écrit Bécasse ici !