Approximation polyônomiale d'une fonction développable en série entière

HEY ! Rajouter le truc sur Runge dans l'énoncé et corriger le widebar après.

On considère le schéma numérique suivant pour approcher une fonction f sur $[a,b]$. On considère n abscisses $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. On pose P le polynôme interpolateur associé à ce choix d'abscisses et valant $P(x_i) = f(x_i)$. Néanmoins si on choisit ces points comme des sagouins, P_n ne tendra pas vers f en norme infinie. C'est ce qu'on appelle le phénomène de Runge. On le rencontre par exemple pour la fonction $1/(25x^2)$ sur $[-1,1]$. Néanmoins dans le cas d'une fonction assez régulière la méthode marche quel que soit le choix des abscisses. C'est ce que l'on va voir dans ce développement.

Dans toute la suite, on considère une fonction f sur $[a,b]$.

Définition 1. *Soit n un entier et $(x_0,\ldots,x_n)$ une subdivision de $[a,b]$. On note P_n le polynôme interpolateur de f associé à cette subdivision. On définit l'estimation de l'erreur par :*

$$E_n = f - P_n$$

Lemme 2. *Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^{n+1}, $x \in [a,b]$ et $(x_0,\ldots,x_n)$ les abscisses d'interpolation. On peut majorer l'erreur par :*

$$|E_n(x)| =\leq \frac{1}{(n+1)!}|\Pi_n(x)| \times ||f^{(n+1)}||_\infty$$

où $\Pi_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$.

Théorème 3. *Soit $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ développable en série entière en 0 de rayon $R > 3a$. Alors pour tout choix d'abscisses d'interpolation, la suite (P_n) converge uniformément vers f sur $[-a,a]$.*

Commençons par démontrer le lemme :

Démonstration. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^{n+1}. Soit $x \in [a,b]$, si $x = x_i$, alors $E_n(x) = 0$. Sinon, on pose $F(t) = f(t) - P_n(t) - E_n(x)\frac{\Pi_n(t)}{\Pi_n(x)}$. Alors $F(x_i) = f(x_i) - P_n(x_i) - E_n(x)\frac{\Pi_n(x_i)}{\Pi_n(x)} = 0 - 0 = 0$. De plus $F(x) = f(x) - P(x) - E_n(x) = 0$.

Donc F s'annule en $n+2$ points distincts. Donc par itération du théorème de Rolle, $F^{(n+1)}(u) = 0$ pour un $u \in [a,b]$. Or P_n est de degré n et Π_n est unitaire de degré $n+1$, donc :

$$0 = F^{(n+1)}(u) = f^{(n+1)}(u) - 0 - (n+1)! E_n(x)/\Pi_n(x)$$

On en déduit la majoration de l'erreur :

$$|E_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!}|\Pi_n(x)| \times ||f^{(n+1)}||_\infty$$

□

On peut maintenant démontrer le théorème :

Démonstration. Soit f DSE en 0 de rayon $R > 0$. Alors f s'écrit $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ sur $]-R, R[$. On note encore f la fonction analytique complexe ayant les mêmes coefficients sur $B(0, R)$.

Soit r tel que $0 < a < r < R$ et $x \in \mathbb{C}$ tel que $|x| < r$. D'après la formule de Cauchy on a :

$$\begin{aligned} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} &= \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,r)} \frac{f(z)}{(z-x)^{n+1}} dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{(re^{i\theta} - x)^{n+1}} ire^{i\theta} d\theta \end{aligned}$$

D'où :

$$|f^{(n)}(x)| \leq \frac{rn!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{i\theta})|}{|re^{i\theta} - x|^{n+1}} d\theta$$

On note $M_r = \sup_{|z|\leq r} |f(z)|$ qui est bien finie car f est continue sur $\overline{B(0,r)}$. Par inégalité triangulaire inversée on obtient :

$$|f^{(n)}(x)| \leq rM_r n! \frac{1}{(r - |x|)^{n+1}}$$

Or $|x| < a$. Donc on obtient la majoration $||f^{(n)}||_{[-a,a]} \leq \frac{rM_r n!}{(r-a)^{n+1}}$.

D'après le lemme précédent on a donc pour une subdivision quelconque de taille n la majoration de l'erreur suivante :

$$\begin{aligned} ||E_n(f)||_\infty &\leq \frac{1}{(n+1)!} (2a)^{n+1} \frac{rM_r(n+1)!}{(r-a)^{n+2}} \\ &\leq \left(\frac{2a}{r-a}\right)^{n+1} \frac{rM_r}{r-a} \end{aligned}$$

Si $2a/(r-a) < 1$, alors la suite de polynôme converge uniformément vers f sur $[-a, a]$. Ceci équivaut à ce que $2a < r - a$ donc à $3a < r < R$.

□

Références :

- Ciarlet. Attention la présente démonstration utilise la formule de Cauchy qui donne clairement le résultat escompté (alors que dans Ciarlet on bidouille grave pour avoir la majoration). Et puis ici on centre la formule en 0.

Remarques :

- Bien être au clair sur le prolongement complexe pour utiliser la formule de Cauchy.
- Le résultat est vrai pour TOUTE subdivision. Même une subdivision qui se resserre en 0 ! N'empêche qu'en prenant une telle subdivision ça doit quand même converger lentement.
- Et si $R = 3a$ ou moins ça marche pas ?

Leçons concernées :

- 209 - Approximation d'une fonction par des polynômes et polynômes trigonométriques. Exemples et applications.
- 244 - Fonctions développables en séries entière, fonctions analytiques. Exemples.