Connexité de l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite

Théorème 1. *Soient (X, d) un espace compact et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X telle que $\lim_{n\to+\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0$. Alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (x_n) est un connexe de X.*

Théorème 2. *Soient $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \geq 0$ et $x_0 \in [0,1]$ vérifiant $\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} - x_n = 0$. Alors (x_n) converge.*

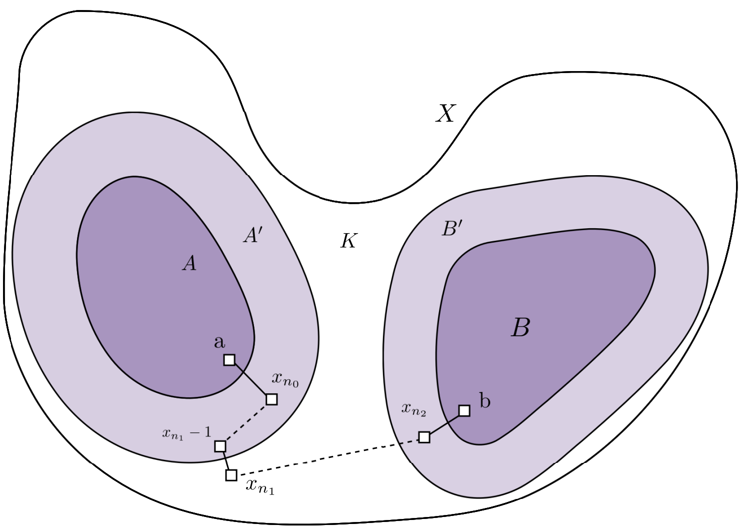
Démonstration. On note Γ l'ensemble des valeurs d'adhérence. Supposons que Γ ne soit pas connexe, alors il existe A et B deux parties fermées de Γ non vides et disjointes telles que $\Gamma = A \bigcup B$. Comme A et B sont fermées dans un compact, alors A et B sont des parties compactes de Γ. On en déduit que $d(A, B) > 0$ car A et B sont disjointes.

On pose $\alpha = d(A, B)$ et on définit les parties A' et B' de X ainsi :

$$A' = \{x \in X : d(x, A) < \alpha/3\} = \bigcup_{a\in A} B(a, \alpha/3)$$

$$B' = \{x \in X : d(x, B) < \alpha/3\} = \bigcup_{b\in B} B(b, \alpha/3)$$

On note $K = \Gamma \backslash (A' \bigcup B')$. Or A' et B' sont ouvertes donc K est fermée dans un compact. On en déduit que K est une partie compacte de X. Pour obtenir une contradiction on va construire une sous-suite de (x_n) dans K.



Par définition de la suite, il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, $d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha/3$. Les parties A et B sont non vides. Il existe donc $a \in A$ et $b \in B$. Or par définition de valeur d'adhérence, il existe $n_0 > N$ tel que $d(a, x_{n_0}) < \alpha/3$. Donc $x_{n_0} \in A'$. De même il existe $n_2 > n_0$ tel que $d(b, x_{n_2}) < \alpha/3$. Donc $x_{n_2} \in B'$.

Montrons que $x_{n_2} \notin A'$. Si c'était le cas, il existerait $a' \in A$ tel que $d(x_{n_2}, a') < \alpha/3$. Alors $d(a', b) \leq d(a', x_{n_2}) + d(x_{n_2}, b) < 2\alpha/3$. C'est exclu. Donc $x_{n_2} \notin A'$.

Ainsi il existe $n_1 \geq n_0$ tel que $x_{n_1} \notin A'$ et $x_{n_1 - 1} \in A'$. Montrons que $x_{n_1} \notin B'$. Si ce n'était pas le cas, alors il existerait $b' \in B$ tel que $d(x_{n_1}, b') < \alpha/3$. Or $x_{n_1-1} \in A'$ donc il existe $a' \in A$ tel que $d(x_{n_1-1}, a') < \alpha/3$. Donc par inégalité triangulaire on obtiendrait :

$$d(a', b') \leq d(a', x_{n_1-1}) + d(x_{n_1-1}, x_{n_1}) + d(x_{n_1}, b') < \alpha$$

Ce qui est exclu. Ainsi $x_{n_1} \notin B'$. Donc $x_{n_1} \in K$. On peut créer comme cela une sous-suite de (x_n) dans K. Or K est compact donc la suite (x_n) admettrait une valeur d'adhérence dans K. C'est contradictoire à la définition de K. Donc $\boxed{\Gamma \text{ est connexe}}$.

$\square$

On va mettre en pratique ce théorème pour démontrer le second théorème.

Démonstration. On note Γ l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite. Alors Γ est un connexe de $\mathbb{R}$ d'après le théorème précédent car $[0, 1]$ est compacte. Ainsi Γ est un intervalle fermé.

La partie Γ est incluse dans $Fix(f) = \{a \in [0, 1] : f(a) = a\}$. En effet si $a \in \Gamma$, alors il existe un extraction φ telle que $x_{\varphi(n)} \to a$ lorsque $n \to +\infty$. Or $\lim_{n \to +\infty} f(x_{\varphi(n)}) - x_{\varphi(n)} = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(a)$ car f est continue. Donc $a = f(a)$ et $a \in Fix(f)$.

Supposons par l'absurde que la suite (x_n) ne converge pas. Alors Γ, qui n'est pas vide car la suite est bornée, n'est pas réduite à un point. Donc il existe $c \in \Gamma$ et $h > 0$ tel que $[c - h, c + h] \subset \Gamma$. Or $c \in \Gamma$. Il existe donc $N \geq 0$ tel que $|x_N - c| \leq h/2$. Donc $x_N \in \Gamma$. Ainsi $x_{n+1} = f(x_n) = x_n$ pour tout $n \geq N$. Donc $\boxed{\text{la suite } (x_n) \text{ converge}}$.

$\square$

Références :

- Gourdon - Analyse (exercice) pour le premier théorème. Attention la démonstration a été légèremment modifiée pour être plus explicite dans les inégalités triangulaires.
- Queffelec - Topologie (exercice) pour le second théorème.

Application : On peut utiliser ce théorème dans la méthode de Jacobi pour montrer que la suite de matrice converge. On y montre en effet qu'une suite bornée de matrices a un nombre fini de valeurs d'adhérence. De plus la suite vérifie $\lim_{n \to +\infty} ||A_{n+1} - A_n|| = 0$. Donc on conclut que la suite converge car une partie connexe finie est réduite à un point.

Question. Est-ce que, *a priori*, les parties A et B sont des compactes de X ?

Réponse. Non, A et B sont des fermés de Γ. Il existe donc $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ des fermés de X tels que $A = \tilde{A} \bigcap \Gamma$ et $B = \tilde{B} \bigcap \Gamma$. Les parties $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ sont fermées et donc compactes dans X. Mais *a priori* ce n'est pas le cas de A et B.

Question. Pourquoi Γ est fermée ?

Réponse. On montre que $\Gamma = \overline{\{x_n, n \in \mathbb{N}\}}$ par double inclusion.

Question. Montrer que si l'ensemble des valeurs d'adhérence est réduit à un point et si la suite est bornée, alors elle converge.

Réponse. On note a l'unique valeur d'adhérence. Supposons que (x_n) ne tende pas vers a. Il existe donc $\epsilon > 0$ et une extraction φ telle que $|x_{\varphi(n)} - a| > \epsilon$. Cette sous-suite est encore bornée et admet donc une valeur d'adhérence $b \neq a$. Donc la suite initiale admettrait deux valeurs d'adhérence. C'est eclu. Donc la suite converge.