leçons : 106 : Groupe linéaire d'un ev
108 : Exemples de parties génératrices d'un gr.
151 : Dimension d'un ev. Rang.
159 : Formes linéaires et hyperplans.
160 : Endom remarquables d'un ev euclidien
161 : Isométries d'un espace affine euclidien
183 : Utilisation des groupes en géométrie.

Générateurs de $O(E)$ et $SO(E)$

32

Références : FGN algèbre 3, PERRIN

Thm : Soit E un $\mathbb{R}$-ev euclidien et $u \in O(E)$.
On note $r = rg(u - id_E)$.
Alors (i) u est produit de r réflexions mais pas moins
(ii) Si $u \in SO(E)$, u est produit d'au plus r retournements (ici $\dim E \geq 3$)

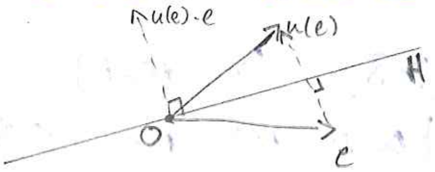
preuve

(i) ① <u>On montre que u est produit de r réflexions par récurrence sur r.</u>

- Si $r = 0$: $u = Id_E$ est produit de 0 réflexions.
- Supposons $r \geq 1$ et le résultat vrai pour $rg(u - id_E) < r$.

$u \neq Id_E$ donc il existe $e \in E$ de norme 1 tq $u(e) \neq e$.

On pose $H = (u(e) - e)^{\perp}$



H est un hyperplan

on note σ la réflexion (orthogonale) par rapport à H.

mq $rg(\sigma \circ u - id_E) < rg(u - id_E) = r$

Il suffit de mq $\ker(u - id_E) \subsetneq \ker(\sigma \circ u - id_E)$

$\|u(e)\| = e$ donc $\langle u(e) - e, u(e) + e \rangle = 0$

donc $\begin{cases} s(u(e) - e) = e - u(e) \\ s(u(e) + e) = u(e) + e \end{cases}$

donc $2\, s(e) = 2\, u(e)$

donc $e = s(u(e))$

donc $e \in \ker(s \circ u - id_E) \setminus \ker(u - id_E)$

Soit $x \in \ker(u - id_E)$. On a $\langle u(x), u(e) - e \rangle = \langle u(x), u(e) \rangle - \langle x, e \rangle = 0$

donc $u(x) \in H$ et $s(u(x)) = u(x) = x$.

Par hypothèse de récurrence : il existe $s_1, \dots, s_p$ des réflexions orthogonales avec $p < n$ telles que $\sigma_0 u = \prod_{i=1}^{p} s_i$. D'où le résultat au rang n. $\square$

② <u>Minimalité de n</u>

Supposons que $u = \prod_{i=1}^{p} s_i$ avec $s_1, \dots, s_p$ des réflexions orthogonales.

MQ $p \geqslant n = rg(u - id_E)$.

On note $H_i = \ker(s_i - id_E)$ $\forall i \in [\![1, p]\!]$.

On a $\bigcap_{i=1}^{p} H_i \subset \ker(u - id_E)$ donc $\dim E - p \leqslant \dim\left(\bigcap_{i=1}^{p} H_i\right) \leqslant \dim E - n$ $\square$

③ Soit $u \in SO(E)$

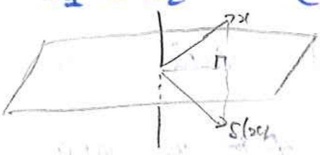
Par ① $u = \prod_{i=1}^{n} s_i$ et comme $\det u = 1 = \prod_{i=1}^{n}(-1) = (-1)^n$, $n = 2p$.

- <u>1er cas</u> : <u>$\dim E = 3$</u>

$n \leqslant 3$ et n pair donc $n = 0$ ou 2

Si $n = 0$, u est produit de 0 retournements $(u = id_E)$

Si $n = 2$, $u = s_1 \circ s_2 = (-s_1) \circ (-s_2)$ avec $-s_1, -s_2$ des retournements.



- <u>2e cas</u> : <u>$\dim E > 3$</u> $(n = \dim E)$

On note $H_i = \ker(s_i - id_E)$ pour $i \in [\![1, n]\!]$. H_i hyperplan.

$\dim(H_1 \cap H_2) \geqslant n - 2$ donc il existe $V \subset H_1 \cap H_2$ un sev de dimension $n-3$.

Pour $i \in [\![1, 2]\!]$, V est stable par s_i donc $V^\perp$ aussi

On note $w_i = s_i|_{V^\perp}$ pour $i = 1, 2$. D'après le cas précédent : $w_1 \circ w_2 = (-w_1) \circ (-w_2)$

avec $-w_1$ et $-w_2$ des retournements de $V^\perp$.

On les prolonge par l'identité sur V pour obtenir e_1, e_2 deux retournements de E tels que $s_1 \circ s_2 = e_1 \circ e_2$ (égaux sur V et sur $V^\perp$...)

Il y a un nombre pair de réflexions donc on peut construire $e_1, \dots, e_n$ des retournements tels que $u = \prod_{i=1}^{n} e_i$