leçons :
181 : Barycentres, convexité
182 : Application des nombres complexes à la géométrie

Le cercle d'Euler

53

Références :
EYDEN p.30 et p.224

Thm : Soient A, B, C trois points non alignés du plan affine euclidien.
On note G le centre de gravité du triangle ABC.
On note M_A, M_B, M_C les milieux des côtés [BC], [AC] et [AB].
On note H_A, H_B, H_C les pieds des hauteurs issues de A, B et C.
On note H l'orthocentre de ABC.
On note H'_A, H'_B, H'_C les milieux des côtés [HA], [HB] et [HC].
Alors il existe un unique cercle, noté Γ', qui passe par les neuf points $M_A, M_B, M_C, H_A, H_B, H_C, H'_A, H'_B, H'_C$. Le centre de Γ' est l'isobarycentre de (H,A,B,C) et il est noté Ω. De plus Ω est le milieu des segments $[M_C H'_C]$, $[M_A H'_A]$, $[M_B, H'_B]$.

preuve :

① On note Γ le cercle circonscrit au triangle ABC et O son centre.
On vectorialise en O et pour tout point M, on note z_M son affixe complexe.
On pose $a = z_A$, $b = z_B$, $c = z_C$
On a en particulier $|a| = |b| = |c| = R$ avec R le rayon du cercle Γ.

On pose • h_G l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$:

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad h_G(z) = -\frac{1}{2}(z - z_G) + z_G$$

• h_H l'homothétie de centre H et de rapport $\frac{1}{2}$:

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad h_H(z) = \frac{1}{2}(z - z_H) + z_H$$

$h_G(\Gamma)$ et $h_H(\Gamma)$ sont des cercles de rayon $\frac{R}{2}$.

② MQ $z_H = a + b + c$:

On pose M le point d'affixe $a+b+c$.
On a $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \mathrm{Re}\left((a+b+c-a)\overline{(c-b)}\right) = \mathrm{Re}\left(b\bar{c} + |c|^2 - |b|^2 - c\bar{b}\right) = 0$ car $|c|^2 = |b|^2$

et de même $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

Donc M est situé sur les trois hauteurs donc $M = H$

③ MQ $h_G(\Gamma) = h_H(\Gamma)$:

Il suffit de montrer qu'ils ont même centre puisqu'ils ont même rayon.
Le centre de $h_G(\Gamma)$ est l'image du centre de Γ par h_G, donc a pour affixe

$$h_G(0) = \frac{1}{2}z_G + z_G = \frac{3}{2}\,\frac{a+b+c}{3} = \frac{a+b+c}{2}$$

De même, le centre de $h_H(\Gamma)$ a pour affixe

$$h_H(0) = -\frac{1}{2} z_H + z_H = \frac{1}{2} z_H = \frac{a+b+c}{2}$$

On note Ω le centre de $h_G(\Gamma) = h_H(\Gamma) = \Gamma'$.

on a $z_\Omega = \dfrac{a+b+c+\frac{a+b+c}{2}}{4}$ donc Ω est l'isobarycentre des points A, B, C et H.

④ MQ $M_A, M_B, M_C \in \Gamma'$.

$z_G = \dfrac{a+b+c}{3} = \dfrac{1}{3} a + \dfrac{2}{3} \dfrac{b+c}{2}$ donc $h_G(A) = M_A$ donc $M_A \in h_G(\Gamma) = \Gamma'$

De même $M_B, M_C \in \Gamma'$

⑤ MQ $H_A', H_B', H_C' \in \Gamma'$.

C'est évident par construction de H_A', H_B' et H_C', on a :

$h_H(A) = H_A'$; $h_H(B) = H_B'$, $h_H(C) = H_C'$

⑥ MQ $H_A, H_B, H_C \in \Gamma'$:

On note σ la symétrie orthogonale par rapport à la droite (AB)

$\forall z \in \mathbb{C} \quad \sigma(z) = a + b - \dfrac{ab}{R^2} \bar{z}$

On a $h_H(\sigma(H)) = H_C$ donc il suffit de montrer que $\sigma(H) \in \Gamma$

$$|\sigma(z_H)| = \left| a+b - \frac{ab}{R^2} (\overline{a+b+c}) \right| = \left| a+b - \frac{|a|^2 b}{R^2} - \frac{a|b|^2}{R^2} - \frac{ab\bar{c}}{R^2} \right|$$

$$= \frac{|ab\bar{c}|}{R^2} = R$$

D'où $\sigma(H) \in \Gamma$ et $H_C \in \Gamma'$.

De même : $H_A, H_B \in \Gamma'$.

⑦ Par associativité du barycentre :

Ω est le milieu de $[M_A, H_A']$, $[M_B, H_B']$, $[M_C, H_C']$