Stabilité d'un système autonome.

Théorème : 1) L'équilibre 0 de $x' = Ax$ est stable ssi les valeurs propres de A sont de partie réelle < 0 ou nulle et de multiplicité 1. L'équilibre est asymptotiquement stables ssi les valeur propres de A sont de partie réelle < 0.

2) Considérons le système autonome $x' = f(x)$, où $0 = f(0)$ (où f est C^1). Si $A = f'(0)$ n'admet que des valeurs propres de partie réelle < 0, alors 0 est asymptotiquement stable.

Démonstration : 1) Les solutions de $x' = Ax$ sont de la forme $t \mapsto e^{tA} x_0$.
Etudions le comportement de e^{tA} si $t \in \mathbb{R}_+$.
Posons le changement de variable $x = Py$ tel que $P^{-1}AP$ soit sous forme de Jordan. Or, on sait calculer l'exponentielle d'un bloc de Jordan.
Si $M(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$ alors $M(\lambda) = \lambda I_n + M(0)$ et comme I_n et $M(0)$ commutent, il vient que

$$e^{tM(\lambda)} = e^{t\lambda} e^{tM(0)} = e^{t\lambda}\left(I_n + tM(0) + \frac{t^2 M(0)^2}{2} + \dots\right)$$
$$= e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 & t & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & t \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

→ Si $Re(\lambda) < 0$ alors $\lim_{t \to +\infty} e^{tM(\lambda)} = 0$

→ Si $Re(\lambda) > 0$ alors $e^{tM(\lambda)}$ n'est pas borné

→ Si $Re(\lambda) = 0$, si $n = 1$, alors $e^{tM(\lambda)}$ est borné au voisinage de $+\infty$. mais ne tend pas vers 0, sinon $e^{tM(\lambda)}$ n'est pas borné.

On en déduit le 1)

2) Soit $\sigma > 0$ tel que $\forall \lambda$ valeur propre de A, $Re(\lambda) < -\sigma$.
On a alors, par le calcul qui précède $e^{t\sigma} e^{tA} \xrightarrow[t \to 0]{} 0$. Donc $\exists C > 0$ tel que $\forall t \geq 0 \quad \| e^{tA} \| \leq C e^{-t\sigma}$
Posons $g(x) = f(x) - Ax$, de telle sorte que g est C^1 sur Ω et $g(x) \underset{x \to 0}{=} o(\|x\|)$
Si on pose $x = e^{tA} y$ (cf variation des constantes), on trouve que
$x' - Ax = e^{tA} y' = g(x)$.
Donc $\forall t \geq 0$, $y(t) = y(0) + \int_0^t e^{-sA} g(x(s))\, ds$.
Soit $\forall t \geq 0$, $x(t) = e^{tA} \underbrace{y(0)}_{= x(0)} + \int_0^t e^{(t-s)A} g(x(s))\, ds$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ tel que $\left[\|x\| < \delta \Rightarrow \|g(x)\| \leq \varepsilon \|x\| \right]$.
Si $\|x(s)\| \leq \delta$ sur $[0; t_0]$, alors $\forall t \leq t_0$,

$$\|x(t)\| \leq \|e^{tA}\| \, \|x(0)\| + \int_0^t \|e^{(t-s)A}\| \, \|g(x(s))\| \, ds$$

$$\leq C e^{-t\sigma} \|x(0)\| + C\varepsilon \max_{[0;t]} \|x(s)\| \int_0^t e^{-(t-s)\sigma} ds$$

$$\leq C e^{-t\sigma} \|x(0)\| + \frac{C\varepsilon}{\sigma} \max_{s\in[0;t]} \|x(s)\|$$

Choisissons $\varepsilon < \frac{\sigma}{2C}$ et $\|x(0)\| < \frac{\delta}{2C}$. Montrons que dans ce cas, $\forall t \geq 0$, $\|x(t)\| \leq \delta$. En effet s'il existe τ tel que $x(\tau) > \delta$, soit $t_0 = \inf \left(t / \|x(t)\| > \delta \right)$. Par continuité, $\|x(t_0)\| = \delta$ mais $\|x(t)\| < \frac{C\delta}{2C} + \frac{\delta}{2} = \delta$, d'où contradiction.

Résumons, $\forall \varepsilon < \frac{\sigma}{2C}$, il existe $\delta > 0$ tel que $\begin{cases} \|x\| \leq \delta \Rightarrow \|g(x)\| \leq \varepsilon \|x\| \\ \text{si } \|x(0)\| < \frac{\delta}{2\varepsilon}, \ \|x\| \leq \delta \text{ en tout temps} \end{cases}$

Pour de tels ε et δ, on a $\forall t \geq 0$, $\|x(t)\| \leq C e^{-t\sigma} \|x(0)\| + C\varepsilon \int_0^t e^{(s-t)\sigma} \|x(s)\| ds$

Posant $\phi(t) = \int_0^t e^{(s-t)\sigma} \|x(s)\| ds$, il vient $\forall t \geq 0$, $\phi'(t) = \|x(t)\| - \sigma \phi(t)$

$$\leq C e^{-t\sigma} \|x(0)\| + (C\varepsilon - \sigma) \phi(t)$$

Gronwall

D'où $\frac{d}{dt} \left[e^{(\sigma - C\varepsilon)t} \phi(t) \right] \leq C e^{-t\sigma} \|x(0)\| \leq C e^{-C\varepsilon t} \|x(0)\|$

Donc $e^{(\sigma - C\varepsilon)t} \phi(t) - \underbrace{\phi(0)}_{=0} \leq C \|x(0)\| \frac{1 - e^{-C\varepsilon t}}{C\varepsilon} \leq \frac{\|x(0)\|}{\varepsilon}$.

Donc $\phi(t) \leq e^{(C\varepsilon - \sigma)t} \frac{\|x(0)\|}{\varepsilon}$ et $\|x(t)\| \leq C e^{-t\sigma} \|x(0)\| + C\varepsilon \frac{\|x(0)\|}{\varepsilon} e^{(C\varepsilon - \sigma)t}$

$$\leq 2C e^{-t\sigma/2} \|x(0)\|$$

vu le choix de $\varepsilon < \frac{\sigma}{2C}$.

Donc $\lim_{t \to +\infty} \|x(t)\| = 0$ si $\|x(0)\|$ est assez proche de 0 (la majoration ne dépend ni de ε et de δ), i.e. 0 est asymptotiquement stable.