17 L^p est complet

ref : Rudin

THÉORÈME 17.1 *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Pour $1 \leq p \leq +\infty$, l'espace vectoriel normé $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ est complet. De plus, de toute suite convergente dans L^p, on peut extraire une sous-suite qui converge presque partout.*

PREUVE.
Cas $p = \infty$:
Soit (f_n) une suite de Cauchy de L^∞. L'idée est la suivante : $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy pour presque tout x, donc converge dans $\mathbb{R}$ qui est complet. Un passage à la limite dans l'inégalité de Cauchy donne la convergence uniforme de (f_n). On choisit tout d'abord des représentants de chaque f_n qu'on appellera encore f_n. Soit $A_k = \{x \text{ tel que } |f_k(x)| > \|f_k\|_\infty\}$ et $B_{n,m} = \{x \text{ tel que } |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty\}$. Ces ensembles sont de mesure nulle par définition des sup essentiels. Notons E la réunion (dénombrable) de tous ces ensembles, qui est donc encore de mesure nulle. Pour $x \notin E$, $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ donc converge vers un réel noté $f(x)$. Cela définit f mesurable bornée sur le complémentaire de E, on l'étend par 0 sur E. Donc $f \in L^\infty$ et la suite (f_n) converge alors uniformément vers f sur le complémentaire de E. Donc $f_n \to f$ dans L^∞. Le deuxième point est clair sans avoir besoin d'extraire.
Cas $p < \infty$:
Soit (f_n) une suite de Cauchy de L^p. De même, on choisit des représentants et on les identifie à f_n. On peut construire une sous-suite (f_{n_i}) vérifiant :

$$\|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_p \leq 2^{-i}$$

Posons alors :

$$g_k = \sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}| \text{ et } g = \sum_{i=1}^{\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|$$

Ce sont des fonctions à valeurs dans $[0, +\infty]$. L'inégalité triangulaire montre que :

$$\|g_k\|_p \leq \sum_i 2^{-i} \leq 1$$

Le lemme de Fatou ou le théorème de convergence monotone donne ensuite $\|g\|_p \leq 1$.

En particulier cela montre que ces fonctions sont finies presque partout et donc pour presque tout x, la série $\sum f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)$ converge absolument. Comme $\mathbb{R}$ est complet, cette série converge et comme c'est une série télescopique, cela signifie que $f_{n_i}(x)$ converge vers la somme de la série noté $f(x)$. Cela définit f presque partout, puis on complète par 0. On a ainsi montré le deuxième point. Il reste à montrer que f est dans L^p et que (f_n) converge vers f pour la norme L^p. Revenons au fait que (f_n) est de Cauchy :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n, m \geq N, \int |f_n - f_m|^p < \epsilon^p$$

En prenant $n = n_i$, on a par le lemme de Fatou :

$$\int |f - f_m|^p \leq \liminf \int |f_{n_i} - f_m|^p < \epsilon^p$$

En particulier, par inégalité triangulaire f est dans L^p, et $f_n \to f$ dans L^p.

□

Leçons concernées : espaces L^p, espaces complets, suite et séries de fonctions intégrables.