Perrin

A_n est simple ($n \geq 5$)

Théorème : le titre

Preuve : 1) Le cas $n = 5$:

a) On peut partitionner A_5 en
- le neutre
- les bi-transpositions (15 éléments)
- les 3 cycles (20 éléments)
- les 5 cycles. (24 ——)

Les 3-cycles sont 2 à 2 conjugués dans A_5 : si $\sigma : \begin{cases} a \to a' \\ b \to b' \\ c \to c' \\ \{d;e\} \to \{d,e\} \end{cases}$, $\sigma (a\,b\,c) \sigma^{-1} = (a'\,b'\,c')$

Les bi-transpositions : si $\sigma \begin{cases} a \to a' \\ b \to b' \\ \{c,d\} \to \{c',d'\} \\ e \to e' \end{cases}$ alors $\sigma (a\,b)(c\,d)(e) \sigma^{-1} = (a'\,b')(c'\,d')(e')$

b) Soit $H \triangleleft A_5$ non trivial. D'après ce qui précède, si H contient un 3-cycle (resp. une bitransposition) il les contient tous (resp. toutes).

Si H contient un 5-cycle, il les contient également tous.

↳ il contient un 5-Sylow de A_5. Il les contient donc tous puisque ceux-ci sont conjugués dans A_n

OU

↳ Si a et b sont d'ordre 5 et $a \in H$, a et b sont conjugués dans $\mathfrak{S}_5$. Donc b est conjugué dans A_5 de a ou a^2 ($\in H$). Donc $b \in H$.

↳ Mq a^2 et a sont conjugués avec un 4-cycle

c) Or, H ne peut pas contenir un seul des trois types d'éléments (en plus du neutre) car ni $25 = 24 + 1$, ni $21 = 20 + 1$, ni $16 = 15 + 1$ ne divisent 60 par le th. de Lagrange.

Donc, par b), $|H| \geq 1 + 15 + 20 = 36 > \frac{|A_n|}{2}$.

Donc, $|H| = 60$ et $H = A_n$.

2) Le cas $n > 5$

Soit $H \triangleleft A_n$. Soit $\sigma \in H$, $\sigma \neq 1$. On veut se ramener au cas $n = 5$.

Pour cela, on va construire à partir de σ un élément ρ qui n'agisse que sur 5 éléments.

Construction de ρ

a) Comme $\sigma \neq 1$, $\exists a \in \{1 \dots n\}$ t.q. $b = \sigma(a) \neq a$. Soit $c \notin \{a, b, \sigma(b)\}$. et τ, le 3-cycle $\tau = (a\, c\, b)$. On a alors $\tau^{-1} = (a\, b\, c)$.
Soit $\rho = \tau \sigma \tau^{-1} \sigma^{-1} = \tau(\sigma \tau^{-1} \sigma^{-1}) = (a\, c\, b)(\sigma(a)\, \sigma(b)\, \sigma(c))$
Posons $F = \{a, b, c, \sigma(a); \sigma(b), \sigma(c)\}$ qui a au plus 5 éléments puisque $\sigma(a) = b$ et qui vérifie $\begin{cases} \rho(F) = F \text{ et } \rho_{|E \setminus F} = id. \\ \rho \neq 1 \text{ car } \rho(b) = \tau\sigma(b) \neq b. \end{cases}$

b) Soit $A(F)$, l'ensemble des permutations paires de F. $A(F) \simeq A_5$.
et $\left.\begin{matrix} A(F) \xrightarrow{i} A_n & \text{où } \bar{u}_{|F} = u \\ u \longmapsto \bar{u} & \bar{u}_{|\{1\dots n\}\setminus F} = id \end{matrix}\right\}$ $A(F)$ se plonge dans A_n via i.
Posons $H_0 = i^{-1}(H) = \{u \in A(F) ; \bar{u} \in H\}$.
On a alors $H_0 \trianglelefteq A(F) \simeq A_5$ et $\rho \in H_0$, $\rho \neq 1$. Donc $H_0 = A_5$ par le cas $n=5$

Si u est un 3-cycle de $A(F)$, on a alors que $\bar{u}$ est un trois cycle de A_n qui est dans H. Donc, comme les 3-cycles sont conjugués dans A_n, ils le sont tous dans H. Donc $H \supset \langle \{3\text{-cycles}\} \rangle = A_n$.
Donc $H = A_n$.

Commentaire : A_4 n'est **pas** simple ! Le sous groupe engendré par les bitransjositions est distingué dans A_4 et d'ordre 4.