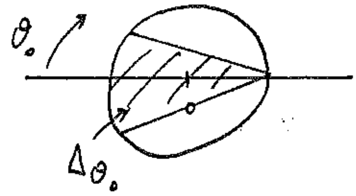
Théorème d'Abel angulaire

Gourdon

Thm: Soit $\sum a_n z^n$ de rayon de CV ≥ 1 tq $S = \sum a_n$ CV.

On pose $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ sur le disque unité.

Soit $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et on pose $\Delta_{\theta_0} = \{ z \in \mathbb{C},\ |z| < 1,\ \exists \rho > 0,\ \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0],\ z = 1 - \rho e^{i\theta} \}$.



Alors $f(z) \xrightarrow[z \in \Delta_{\theta_0}]{z \to 1} S$.

dém: ① Soient $|z| < 1$ et $N \in \mathbb{N}^*$.

Posons $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n$, alors $R_N \to 0$ et $a_N = R_{N-1} - R_N$.

On a donc

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - \sum_{n=0}^{N} a_n &= \sum_{n=1}^{N} a_n (z^n - 1) \\
&= \sum_{n=1}^{N} (R_{n-1} - R_n)(z^n - 1) \\
&= \sum_{n=1}^{N} R_{n-1}(z^n - 1) - \sum_{n=1}^{N} R_n (z^n - 1) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} R_n (z^{n+1} - 1) - \sum_{n=1}^{N} R_n (z^n - 1) \\
&= R_0 (z-1) - R_N (z^N - 1) + \sum_{n=1}^{N-1} R_n (z^{n+1} - z^n) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} R_n (z^{n+1} - z^n) - R_N (z^N - 1) \\
&= (z-1) \sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n - R_N (z^N - 1).
\end{aligned}$$

$N \to +\infty$ donne

$$\underline{f(z) - S = (z-1) \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n}_{\text{a bien un sens car } |R_n| \leq \varepsilon \text{ pour } n \text{ grand.}}}$$

② Soit $\varepsilon > 0$.

Il existe $N \in \mathbb{N}$ tq $|R_n| < \varepsilon$ pour $n \geq N$.

Soit $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$.

Alors

$$|f(z) - S| \leq |z-1| \left| \sum_{n=0}^{N} R_n z^n \right| + \varepsilon |z-1| \left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} |z|^n \right)$$

$$\leq |z-1| \left(\sum_{n=0}^{N} |R_n| \right) + \varepsilon \frac{|z-1|}{1-|z|}.$$

Si $z \in \Delta_{\theta_0}$, on peut écrire $z = 1 - \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $|\theta| \leq \theta_0$ donc

$$|z|^2 = 1 - 2\rho\cos(\theta) + \rho^2$$

d'où $$\frac{|z-1|}{1-|z|} = \frac{|z-1|}{1-|z|^2}(1+|z|) = \frac{\rho}{2\rho\cos(\theta) - \rho^2}(1+|z|) \leq \frac{2}{2\cos(\theta) - \rho}$$

donc si $\rho \leq \cos(\theta_0)$, alors $$\frac{|z-1|}{1-|z|} \leq \frac{2}{2\cos(\theta_0) - \cos(\theta_0)} = \frac{2}{\cos(\theta_0)}.$$

Ainsi, pour

$z \in \Delta_{\theta_0}$, $|z-1| \leq \cos(\theta_0)$, on a

$$|f(z) - S| \leq |z-1| \left(\sum_{n=0}^{N} |R_n| \right) + \varepsilon \frac{2}{\cos(\theta_0)}.$$

Mais pour $|z-1|$ petit, on a donc

$$\underline{|f(z) - S| \leq \varepsilon \left(1 + \frac{2}{\cos(\theta_0)} \right)}$$ d'où le résultat.