

DVP 1 : Intégrale de Fermi [G, p 342-343]

Énoncé :

$$f = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\pi/4}$$

Schéma de preuve :

Étape 1

Exprimer l'intégrale double $F(t) = \iint_{[0,t]^2} e^{-x^2-y^2} dx dy$
en fonction de l'intégrale $f(t) = \int_0^t e^{-x^2} dx$
avec un passage en coordonnées polaires

Étape 2

Calculer la limite de l'intégrale
 $|F(t)| = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt$ quand $T \rightarrow 0$ et ∞ notamment
avec le théorème de Fubini

Étape 3

En déduire la valeur de f .

Preuve

$$\textcircled{1} \text{ On a } e^{-x^2-y^2} = e^{-x^2} e^{-y^2}$$

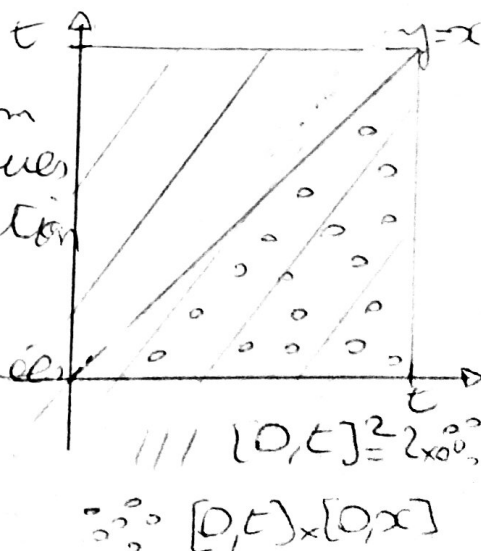
donc d'après le théorème de Fubini,

$$F(t) = \iint_{[0,t]^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^t e^{-x^2} dx \int_0^t e^{-y^2} dy \\ = f(t)^2$$

Comme le domaine d'intégration
et l'intégrande sont symétriques
par rapport à la droite d'équation
 $y=x$, on a $F(t) = 2 \int_0^t \int_0^x e^{-x^2-y^2} dy dx$

On effectue un passage en coordonnées
polaires en posant $x = r \cos \theta$,
 $y = r \sin \theta$, $J(r, \theta) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix}$

on a $0 \leq r \cos \theta \leq t \Leftrightarrow 0 \leq r \leq \frac{t}{\cos \theta}$



$$\text{et } 0 \leq r \sin \theta \leq r \cos \theta \Leftrightarrow 0 \leq \tan \theta \leq \cos \theta \\ \Leftrightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

On a donc d'après le théorème du changement de variable, $F(t) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{t \cos \theta}} e^{ir^2} r dr d\theta$

Comme $r \mapsto r e^{ir^2}$ est continue sur un pavé, on peut intervertir les intégrales ce qui donne $F(t) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{t \cos \theta}} r e^{ir^2} dr d\theta$

$$= i \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(e^{i \frac{t^2}{\cos \theta}} - 1 \right) d\theta \\ = i \frac{\pi}{4} - i \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{i \frac{t^2}{\cos \theta}} d\theta$$

$$\textcircled{2} \text{ Soit } I(T) = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt \text{ la moyenne de } F \\ = \frac{1}{T} \int_0^T \left(i \frac{\pi}{4} - i \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{i \frac{t^2}{\cos \theta}} d\theta \right) dt \\ = i \frac{\pi}{4} - \frac{i}{T} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^T e^{i \frac{t^2}{\cos \theta}} dt d\theta$$

Comme $(t, \theta) \mapsto e^{i \frac{t^2}{\cos \theta}}$ est continue sur un pavé je peux intervertir les intégrales ce qui donne $I(T) = i \frac{\pi}{4} - \frac{i}{T} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{T \cos \theta}} e^{iu^2} du d\theta$

$$\text{On pose } u = \frac{t}{\cos \theta} \Rightarrow du = \frac{dt}{\cos \theta} \Leftrightarrow dt = \cos \theta du$$

$$\text{d'où } I(T) = i \frac{\pi}{4} - \frac{i}{T} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{T}{\cos \theta}} e^{iu^2} \cos \theta dt d\theta \\ = i \frac{\pi}{4} - \frac{i}{T} \int_0^{\frac{\pi}{4}} f\left(\frac{T}{\cos \theta}\right) \cos \theta d\theta$$

$$\text{Q } f(t) = \int_0^t e^{ix^2} dx$$

En posant $u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx = \sqrt{u} du$
d'où $f(t) = \int_0^{t^2} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du$ qui converge d'après la règle d'Abel

donc f est bornée

$$\text{donc } \frac{1}{T} \int_0^{T/4} f(\cos \theta) \cos \theta d\theta \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{donc } I(T) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{De plus } F(t) = |f(t)|^2 \text{ donc } I(T) = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt$$

I est la moyenne de Césaro de f^2 donc comme $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} f^2$, on a que $I(T) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} f^2$

$$\text{donc par unicité de la limite } f^2 = e^{i\frac{\pi}{4}}$$
$$\text{donc } f = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\pi/4} \text{ ou } \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{5i\pi/4}$$

Pour déterminer la valeur de f , il faut donc avoir le signe de $\text{Im}(f)$:

$$+ \text{ Si } \text{Im}(f) > 0, f = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\pi/4}$$

$$+ \text{ Si } \text{Im}(f) < 0, f = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{5i\pi/4}$$

$$f = \int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx$$

On réutilise le changement de variable $u = x^2$ d'où $f = \int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du$

$$\text{donc } \text{Im}(f) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}} du$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}} du$$

car pour déterminer le signe de $\text{Im}(f)$ il faut pouvoir déterminer le signe de $\sin(u)$

$$\text{Posons } u_n = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}} du$$
$$= \int_{2n\pi}^{2n\pi + \pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}} du + \int_{2n\pi + \pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}} du$$

$$\text{On pose } y = u - \pi \Rightarrow dy = du \text{ et } \sin(y + \pi) = -\sin(y)$$

donc on a

$$\begin{aligned}
 u_n &= \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}} du - \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u+\pi}} du \\
 &= \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin(u) \left(\frac{1}{\sqrt{u}} - \frac{1}{\sqrt{u+\pi}} \right) du
 \end{aligned}$$

Comme $\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in [2n\pi, (2n+1)\pi]$ $\sin(u) \left(\frac{1}{\sqrt{u}} - \frac{1}{\sqrt{u+\pi}} \right) \geq 0$

on a par positivité de l'intégrande,

$$u_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{donc } \liminf f \geq 0$$

$$\text{donc } \boxed{f = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\pi/4}}$$