213 Espaces de Hilbert

## Existence de l'espérance conditionnelle. (Barbe Ledoux)

**Théorème :** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. $\mathcal{B}$ sous tribu de $\mathcal{A}$ et $X$ une v.a. réelle $L^1$. Alors il existe une unique (au sens presque sûr) variable aléatoire $Y$ notée $\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$, $\mathcal{B}$ mesurable vérifiant

$$\begin{cases} \forall B \in \mathcal{B}, \int_B \mathbb{E}(X|\mathcal{B})(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) = \int_B X\, d\mathbb{P} \\ \qquad \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B})\, \mathbb{1}_B) = \mathbb{E}(X \mathbb{1}_B) \end{cases}$$

**Preuve :** 1) Unicité : Si $Y_1, Y_2$ conviennent, alors $\forall B \in \mathcal{B}$,

$$\int_B Y_1\, d\mathbb{P} = \int_B Y_2\, d\mathbb{P} = \int_B X\, d\mathbb{P}.$$

En particulier, si $B = \{Y_1 - Y_2 \geq 0\}$, $B$ est dans $\mathcal{B}$ et

$$\int_{\{Y_1 \geq Y_2\}} (Y_1 - Y_2)\, d\mathbb{P} = \int_\Omega \underbrace{(Y_1 - Y_2)^+}_{\geq 0}\, d\mathbb{P} = 0$$

Et de même $\int_\Omega (Y_2 - Y_1)^+\, d\mathbb{P} = 0$

Donc, en sommant les deux, $\int_\Omega |Y_2 - Y_1|\, d\mathbb{P} = 0$ et $Y_1 = Y_2$ p.s.

2) Existence : a) Le cas $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$

$L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace de Hilbert muni de $\langle f; g \rangle = \int fg\, d\mathbb{P}$.

Le sous espace vectoriel $L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est fermé dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Il admet donc un supplémentaire orthogonal.

Posons $Q$ la projection orthogonale sur $L^2(\Omega, \mathcal{B}; \mathbb{P})$

Elle vérifie $\left.\begin{array}{l} \forall X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \\ \forall Z \in L^2(\Omega; \mathcal{B}; \mathbb{P}) \end{array}\right\} \langle X - QX; Z \rangle = 0 = \int_\Omega (X - QX) Z\, d\mathbb{P}$

$QX$ est une classe d'équivalence (mod. presque partout) de fonctions de $L^2(\Omega, \mathcal{A}; \mathbb{P})$. On en choisit un représentant $\underset{\mathcal{B}\text{-mes.}}{\text{que}}$ l'on note $\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$

On a alors si $Z = \mathbb{1}_B$ $(B \in \mathcal{B})$ $\langle X - QX; \mathbb{1}_B \rangle = 0 = \int_B [X - \mathbb{E}(X|\mathcal{B})]\, d\mathbb{P}$

Donc $\forall B \in \mathcal{B}$, $\int_B X\, d\mathbb{P} = \int_B \mathbb{E}(X|\mathcal{B})\, d\mathbb{P}$.

b) Si $X \geq 0$, $X \in L^2$

Alors, si $B = \{\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) < 0\} \in \mathcal{B}$.

$0 \leq \int_B X \, d\mathbb{P}$ et $\int_B \mathbb{E}(X|\mathcal{B}) \, d\mathbb{P} \leq 0$ et $< 0 \Leftrightarrow p(B) > 0$.

Donc $\int_B \mathbb{E}(X|\mathcal{B}) \, d\mathbb{P} = 0$ et $p(B) = 0$, i.e.

$\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) \geq 0$ p.s.

c) Le cas $X \in L^1$ et $X \geq 0$

Alors on pose $X_n = \min(X ; n)$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et est positive.

On peut donc définir pour tout $n$, $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{B})$ qui est positive.

De plus $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$,

$\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{B}) - \mathbb{E}(X_n|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(\underbrace{X_{n+1} - X_n}_{L^2 \, \geq 0}|\mathcal{B}) \geq 0$.

Enfin $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X_n|\mathcal{B})) = \mathbb{E}(X_n) \leq \mathbb{E}(X) < +\infty$.

Donc par le théorème de convergence monotone, $(\mathbb{E}(X_n|\mathcal{B}))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une fonction notée $\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$, $\mathcal{B}$-mesurable et $L^1$.

Enfin, si $B \in \mathcal{B}$, $\int_B \mathbb{E}(X|\mathcal{B}) \, d\mathbb{P} = \int_B \lim_{n \to \infty} \mathbb{E}(X_n|\mathcal{B}) \, d\mathbb{P} = \lim_{n \to \infty} \int_B \mathbb{E}(X_n|\mathcal{B}) \, d\mathbb{P}$

$= \lim_{n \to \infty} \int_B X_n \, d\mathbb{P}$

$= \int_B X \, d\mathbb{P}$.

d) Si $X \in L^1$.

$X = X^+ - X^-$

On pose $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(X^+|\mathcal{B}) - \mathbb{E}(X^-|\mathcal{B})$.

ouvrard : probabilité 2

de $L^2$ à $L^1$ sans passer par le cas $X \geq 0$