Processus de Poisson

Leçons : 263, 264

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Définition 1

Un processus de comptage est une suite de variables aléatoires réelles $(N(t))_{t \geqslant 0}$ telles que

1 $N(0) = 0$

2 $\forall t \geqslant 0, N(t) \in \mathbb{N}^*$

3 $t \mapsto N(t)$ *est croissante*

Du point de vue de la modélisation, $\forall 0 \leqslant a \leqslant b$, $N(b) - N(a)$ représente le nombre de "tops" se produisant dans l'intervalle de temps $[a, b[$.

Définition 2

Un processus de Poisson de densité $\lambda > 0$ est un processus de comptage $(N(t))_{t \geqslant 0}$ tel que :

1 *Le processus est à accroissement indépendants : $\forall t_0 \leqslant t_1 < \cdots < t_k$, les variables aléatoires $N_{t_k} - N_{t_{k-1}}, \ldots, N_{t_1} - N_{t_0}$ sont indépendantes.*

2 *Pour tout $(s, t) \in \mathbb{R}_+^2$, $N(s + t) - N(s)$ suit la loi de Poisson de paramètre λt.*

Les processus de Poisson sont souvent utilisés pour modéliser des files d'attente, chaque top représentant l'appel d'un client au guichet.

Proposition 3

Un processus de Poisson est à accroissements stationnaires : soit $N_1, \ldots, N_k$ le nombre de tops se produisant dans les intervalles $I_1, \ldots, I_k$; alors si $\tau \geqslant 0$, et $N_1', \ldots, N_k'$ est le nombre de tops se produisant dans les intervalles translatés de τ $I_1' + \tau, \ldots, I_k'$, $(N_1', \ldots, N_k')$ et $(N_1, \ldots, N_k)$ ont la même loi.

Proposition 4

Un processus de Poisson est localement continu : $\lim\limits_{h \to 0^+} \mathbb{P}(N(t + h) - N(t) \geqslant 1) = 0$

Le but du développement est d'étudier le temps d'attente entre deux tops :

Théorème 5

Soit $S_n = \inf\{t \geqslant 0, N(t) \geqslant n\}$ et $T_k = S_k - S_{k-1}$ pour $k \geqslant 1$. Alors

1 *$(T_n)_n$ est une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathscr{E}(\lambda)$*

2 *$S_n = T_1 + \cdots + T_n$ suit la loi $\Gamma(n, \lambda)$ de densité* $f_{S_n}(s) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{(n-1)!} e^{-\lambda s} (\lambda s)^{n-1}, s \geqslant 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Étape 1 : Changement de variable : supposons que le vecteur aléatoire $(S_1, \ldots, S_n)$ soit à densité, de densité φ. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue bornée. Alors comme $S_n \geqslant \ldots, \geqslant S_1$, par un changement de variable $s_k = t_1 + \cdots + t_k$ de jacobien 1 (la matrice jacobienne est triangulaire), on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(T_1,\ldots,T_n)] &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{S_n\geqslant\cdots\geqslant S_1} f(S_1,\ldots,S_n - S_{n-1})] \\
&= \int_{0\leqslant s_1\leqslant\cdots\leqslant s_n} f(s_1,\ldots,s_n - s_{n-1})\varphi(s_1,\ldots,s_n)\mathrm{d}s_1\ldots\mathrm{d}s_n \\
&= \int_{t_1,\ldots,t_n\geqslant 0} f(t_1,\ldots,t_n)\varphi(t_1,\ldots,t_1+\cdots+t_n)\mathrm{d}t_1\ldots\mathrm{d}t_n
\end{aligned}$$

Donc $\psi : (t_1,\ldots,t_n) \mapsto \varphi(t_1, t_1+t_2,\ldots,t_1+\cdots+t_n)$ est la densité de $(T_1,\ldots,T_n)$

Étape 2 : Calcul de la densité de $(S_1,\ldots,S_n)$:

Soit A_n l'évènement : $S_1 \in [s_1, s_1+h_1[,\ldots,S_n \in [s_n, s_n+h_n[$ où $0 < s_1 < s_1+h_1 < s_2 < \cdots < s_n + h_n$. Alors A_n est la réunion des évènements :

- zéro top dans $[0, s_1[$ et *exactement* un top dans $[s_1, s_1+h_1[$
- zéro top dans $[s_1+h_1, s_2[$ et exactement un top dans $[s_2, s_2+h_2[$
- $\vdots$
- zéro top dans $[s_{n-1}+h_{n-1}, s_n[$ et *au moins* un top dans $[s_n, s_n+h_n[$.

Or, le processus étant à accroissements indépendants, les variables aléatoires "nombre de tops" dans des intervalles disjoints sont indépendantes de sorte que

$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(N(s_1)=0)\times\mathbb{P}(N(s_1+h_1)-N(s_1)=1)\times\mathbb{P}(N(s_2)-N(s_1+h_1)=0)\times\mathbb{P}(N(s_2+h_2)-N(s_2)=1)\times\cdots\times\mathbb{P}(N(s_n)-N(s_{n-1}+h_{n-1})=0)\times\mathbb{P}(N(s_n+h_n)-N(s_n)\geqslant 1)$ donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_n) &= e^{-\lambda s_1}e^{-\lambda h_1}(\lambda h_1)e^{-\lambda(s_2-s_1-h_1)}e^{-\lambda h_2}(\lambda h_2)\ldots e^{-\lambda(s_n-s_{n-1}-h_{n-1})}(1-e^{-\lambda h_n}) \\
&= e^{-\lambda s_n}\lambda^{n-1}h_1\ldots h_{n-1}(1-e^{-\lambda h_n})
\end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que

$$\mathbb{P}(A_n) = \int_{\xi_1=s_1}^{s_1+h_1}\cdots\int_{\xi_n=s_n}^{s_n+h_n}\mathbb{1}_{0\leqslant\xi_1\leqslant\cdots\leqslant\xi_n}\lambda^n e^{-\lambda\xi_n}\mathrm{d}\xi_1\ldots\mathrm{d}\xi_n$$

ceci valant pour tous les pavés $[s_1,s_1+h_1[\times\cdots\times[s_n+h_n[$, qui constituent une classe stable par intersection engendrant $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ donc $(S_1,\ldots,S_n)$ a pour densité $\mathbb{1}_{\xi_1\leqslant\cdots\leqslant x_n}\lambda^n e^{-\lambda\xi_n}$.

Conclusion : selon la première étape, la densité de $(T_1,\ldots,T_n)$ est

$(t_1,\ldots,t_n) \mapsto \lambda^n e^{-\lambda t_1}\ldots e^{-\lambda t_n}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^n}(t_1,\ldots,t_n)$. En calculant les densités marginales, on constate immédiatement que $f_{(T_1,\ldots,T_n)}(t_1,\ldots,t_n) = f_{T_1}(t_1)\ldots f_{T_n}(t_n)$; en d'autres termes, $T_1,\ldots,T_n$ sont indépendantes. La loi de S_n est donc $\Gamma(n,\lambda)$ en vertu du lemme ci-dessous. □

Lemme 6

Si $T_1,\ldots,T_n$ sont n variables aléatoires i.i.d de loi $\mathscr{E}(\lambda)$, alors $S = T_1+\cdots+T_n$ suit la loi $\Gamma(n,\lambda)$

Démonstration. Calculons la transformée de Laplace d'une variable aléatoire V suivant la loi $\Gamma(n,\lambda)$, en rappelant que la transformée de Laplace caractérise la loi :

$L_V(u) = \mathbb{E}[e^{uS}] = \dfrac{\lambda}{\Gamma(n)}\displaystyle\int_0^\infty e^{ux}e^{-\lambda x}(\lambda x)^{n-1}\mathrm{d}x = \dfrac{\lambda}{\Gamma(n)}\displaystyle\int_0^\infty e^{-x(\lambda-u)}(\lambda x)^{n-1}\mathrm{d}x$ bien définie pour $\lambda - u > 0$ donc en posant $y = x(\lambda-u)$, on a

$$L_V(u) = \frac{\lambda}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} e^{-y} \left(\frac{\lambda y}{\lambda - u} \right)^{n-1} \frac{\mathrm{d}y}{\lambda - u} = \frac{1}{\Gamma(n)} \left(\frac{\lambda}{\lambda - u} \right)^n \int_0^{\infty} e^{-y} y^{n-1} \mathrm{d}y = \left(\frac{\lambda}{\lambda - u} \right)^n$$

Or, par le même changement de variable, si $T \sim \mathscr{E}(\lambda)$, $L_T(u) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{ux} \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}x = \frac{\lambda}{\lambda - u} \int_0^{\infty} e^{-y} \mathrm{d}y = \frac{\lambda}{\lambda - u}$ donc comme la transformée de Laplace d'une somme de variable aléatoires indépendantes est le produit de leurs transformées de Laplace, on a le résultat. □

Remarque.
- On peut aussi parler du paradoxe de l'inspection, ou paradoxe de l'autobus, c'est dans le Foata Fuchs juste après.
- Les deux premières propositions sont indépendantes du développement proprement dit.

Références :

- Dominique FOATA et Aimé FUCHS (2004). *Processus stochastiques : processus de Poisson, chaînes de Markov et martingales*. Dunod, pp. 28-31
- Dominique FOATA et Aimé FUCHS (2003). *Calcul des probabilités*. Dunod, p. 148 (pour le lemme)