Théorème de Weierstrass par les polynômes de Bernstein

Leçons : 202, 209, 228, 260, 264

Théorème 1

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ continue et $B_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$ le n-ième polynôme de Bernstein associé à f.

Soit $\omega : h \mapsto \sup\{|f(u)-f(v)|, |u-v| \leqslant h\}$ le module d'uniforme continuité de f. Alors $\|f-B_n\|_\infty \leqslant \frac{3}{2}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ donc $(B_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

L'inégalité est optimale dans le sens où il existe $f \in \mathscr{C}([0,1]$ et $\delta > 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f-B_n\|_\infty \geqslant \delta\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Remarquons d'abord que ω est bien définie puisque, selon le théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[0,1]$, ce qui assure de plus que $\omega(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$.

Lemme 2

La fonction ω est croissante, sous-additive et pour tout $h \in [0,1]$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $\lambda h \in [0,1]$, on a $\omega(\lambda h) \leqslant (\lambda+1)\omega(h)$.

Démonstration. La croissance de ω est évidente.

Soient $h_1, h_2 \in [0,1]$ tels que $h_1+h_2 \in [0,1]$. Soient $v > u$ tels que $v-u \leqslant h_1+h_2$. S'il existe i tel que $v-u \leqslant h_i$, alors $|f(v)-f(u)| \leqslant \omega(h_i)$.

Sinon, on peut écrire $v-u = v-(u+h_1)+u+h_1-u$ et $0 \leqslant v-(u+h_1) \leqslant h_1+h_2-h_1 \leqslant h_2$ donc $|f(v)-f(u)| \leqslant \omega(h_2)+\omega(h_2)$.

En définitive, $\omega(h_1+h_2) \leqslant \omega(h_1)+\omega(h_2)$: ω est sous-additive.

Par une récurrence immédiate, on a pour tous $h \in [0,1]$ et $r \in \mathbb{N}$ tel que $rh \in [0,1]$, on a $\omega(rh) \leqslant r\omega(h)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $\lambda h \in [0,1]$. Alors par croissance de ω, on a

$$\omega(\lambda h) \leqslant \omega((E(\lambda)+1)h) \leqslant (E(\lambda)+1)\omega(h) \leqslant (\lambda+1)\omega(h)$$

□

Démonstration (du théorème)**.** Soit $x \in [0,1]$ et $(X_i)_i$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathscr{B}(x)$. Alors si $S_n = X_1+\cdots+X_n$, on sait que S_n suit la loi binômiale $\mathscr{B}(x,n)$ et par théorème de transfert, $\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = B_n(x)$.

Ainsi, $|f(x)-B_n(x)| \leqslant \mathbb{E}\left[\left|f(x)-f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\omega\left(\left|x-\frac{S_n}{n}\right|\right)\right]$

Or, selon le lemme,

$$\omega\left(\left|x-\frac{S_n}{n}\right|\right) = \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \times \left(\sqrt{n}\left|x-\frac{S_n}{n}\right|\right) \leqslant \left(\left|x-\frac{S_n}{n}\right|+1\right)\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Donc

$$|f(x)-B_n(x)| \leqslant \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(\sqrt{n}\left\|x-\frac{S_n}{n}\right\|_1+1\right) \leqslant \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(\sqrt{n}\left\|x-\frac{S_n}{n}\right\|_2+1\right)$$

Or, puisque $\mathbb{E}\left[\dfrac{S_n}{n}\right] = x$,

$$\left\|x - \frac{S_n}{n}\right\|_2^2 = \mathrm{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) \overset{\text{independance}}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} x(1-x) = \frac{x(1-x)}{n}$$

Donc finalement $|f(x) - B_n(x)| \leqslant \omega\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)(\sqrt{x(1-x)}+1) \leqslant \dfrac{3}{2}\omega\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ car si $x \in [0,1]$, $x \leqslant \dfrac{1}{2}$ ou $1-x \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Prouvons maintenant l'optimalité de cette majoration. Soit $f(x) = \left|x - \dfrac{1}{2}\right|$. Par inégalité triangulaire renversée, on a $\omega(h) \leqslant h$ pour tout h.

Soient $X_1, \ldots, X_n$ une suite de variables de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$ indépendantes, $\varepsilon_j = 2X_j - 1$ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ et $T_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j = 2S_n - n$. Les ε_j constituent une suite de variables de Rademacher indépendantes.

De plus, $\|f - B_n\|_\infty \geqslant \left|f\left(\dfrac{1}{2}\right) - B_n\left(\dfrac{1}{2}\right)\right| = \left|B_n\left(\dfrac{1}{2}\right)\right| = \mathbb{E}\left|\dfrac{S_n}{n} - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2n}\mathbb{E}[|T_n|]$

Soit $Y = \displaystyle\prod_{j=1}^{n}\left(1 + \frac{i}{\sqrt{n}}\varepsilon_j\right)$. En utilisant l'inégalité $e^x \geqslant 1+x$, on obtient :

$$|Y| = \prod_{j=1}^{n}\sqrt{1+\frac{\varepsilon_j^2}{n}} \leqslant \prod_{j=1}^{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}} \leqslant \prod_{j=1}^{n}\sqrt{e^{1/n}} = \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}\right) = \sqrt{e}$$

Donc $|\mathbb{E}[T_n Y]| \leqslant \sqrt{e}\,\mathbb{E}[|T_n|]$

Mais par ailleurs, les ε_j étant indépendantes et centrées,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[T_n Y] &= \sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}[\varepsilon_j\left(1+\frac{i}{\sqrt{n}}\varepsilon_j\right)\prod_{k\neq j}\left(1+\frac{i}{\sqrt{n}}\varepsilon_k\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}[\varepsilon_j]\prod_{k\neq j}\left(1+\frac{i}{\sqrt{n}}\mathbb{E}[\varepsilon_k]\right) + \frac{i}{\sqrt{n}}\mathbb{E}[\varepsilon_j^2]\prod_{k\neq j}\left(1+\frac{i}{\sqrt{n}}\mathbb{E}[\varepsilon_k]\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{i}{\sqrt{n}} = i\sqrt{n}
\end{aligned}$$

Donc $\sqrt{n} \leqslant \sqrt{e}\,\mathbb{E}[|T_n|]$ de sorte que $\|f - B_n\|_\infty \geqslant \sqrt{\dfrac{n}{e}} \times \dfrac{1}{2n} \geqslant \dfrac{1}{2\sqrt{e}}\omega\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

□

Remarque. On se ramène au théorème de Weierstrass sur un intervalle quelconque $[a,b]$ en posant pour $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ continue, $\tilde{f} : x \mapsto f(a+(b-a)x)$.

Référence : Hervé QUEFFÉLEC et Claude ZUILY (2013). *Analyse pour l'agrégation*. 4e éd. Dunod, p. 518