Inversion de Fourier dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$

Leçons : 236, 239, 250

Théorème 1

Si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ *alors* $\hat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ *et* $\forall x \in \mathbb{R}, \hat{\hat{f}}(x) = 2\pi f(-x)$.

Démonstration. L'idée phare de la preuve est d'approcher pour x donné $\hat{\hat{f}}(x)$ en multipliant par une fonction gaussienne $t \mapsto e^{-\varepsilon t^2}$. Soit donc $f_\varepsilon : t \mapsto e^{-\varepsilon t^2}\hat{f}(t)e^{itx}$.

Étape 1 : par convergence dominée, on remarque que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)e^{itx}\mathrm{d}t$

En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{-\varepsilon t^2}\hat{f}(t)e^{itx} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \hat{f}(t)e^{itx}$; de plus, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|f_\varepsilon(t)| \leqslant \left|\hat{f}(t)\right|$, et $\hat{f}$ est intégrable car dans l'espace de Schwartz.

Étape 2 : montrons que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 2\pi f(x)$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(t)\mathrm{d}t &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon t^2}\hat{f}(t)e^{itx}\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(u)e^{-itu}e^{itx}e^{-\varepsilon t^2}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(u)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{it(x-u)}e^{-\varepsilon t^2}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}} f(u)\hat{g}_\varepsilon(x-u)\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

où $g_\varepsilon : t \mapsto e^{-\varepsilon t^2}$. L'interversion par le théorème de Fubini est justifiée par le fait que f et g_ε sont intégrables.

Par un théorème de dérivation sous le signe intégrale, on a

$$\forall v \in \mathbb{R}, \hat{g}_\varepsilon'(v) = \int_{\mathbb{R}} (-it)e^{-\varepsilon t^2}e^{-itv}\mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} \left[\frac{i}{2\varepsilon}e^{-\varepsilon t^2}e^{-itv}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} \frac{i}{2\varepsilon}e^{-\varepsilon t^2}\times(-iv)e^{-itv}\mathrm{d}t = \frac{-v}{2\varepsilon}\hat{g}_\varepsilon(v)$$

De plus, $\displaystyle\hat{g}_\varepsilon(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon t^2}\mathrm{d}t \overset{\tau=\sqrt{\varepsilon}t}{=} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}$.

Donc

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(t)\mathrm{d}t &= \int_{\mathbb{R}} f(u)\sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}e^{-(x-u)^2 4\varepsilon}\mathrm{d}u \\
&\overset{v=(u-x)/(2\sqrt{\varepsilon})}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x+2\sqrt{\varepsilon}v)\sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}e^{-v^2}2\sqrt{\varepsilon}\mathrm{d}v = \int_{\mathbb{R}} f(x+2\sqrt{\varepsilon}v)2\sqrt{\pi}e^{-v^2}\mathrm{d}v
\end{aligned}$$

Par convergence dominée, on obtient $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \int_{\mathbb{R}} f(x)2\sqrt{\pi}e^{-v^2}\mathrm{d}v = 2\pi f(x)$.

L'hypothèse de domination est bien vérifiée car f est bornée comme tout élément de l'espace de Schwartz donc $\forall \varepsilon > 0, \forall v \in \mathbb{R}, |f(x+2\sqrt{\varepsilon}v)|2\sqrt{\pi}e^{-v^2} \leqslant \|f\|_\infty 2\sqrt{\pi}e^{-v^2}$: on a dominé par une gaussienne intégrable.

□

Remarque. Le développement est probablement un peu court, on a le temps de détailler les convergences dominées / Fubini effectuées. On peut justifier que $\hat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ pour terminer, ou bien, spécialement dans la leçon 236, donner un exemple d'utilisation de cette formule pour un calcul d'intégrales.

Référence : Hervé QUEFFÉLEC et Claude ZUILY (2013). *Analyse pour l'agrégation*. 4e éd. Dunod, pp. 330-331