Théorème de sélection de Helly

Leçons : 203, 229, 241, *262*

Théorème 1

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions croissantes de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$, il existe une sous-suite de (f_n) convergeant simplement vers $f : \mathbb{R} \to [0,1]$.

Démonstration.

- Par un procédé d'extraction diagonal on obtient le résultat préliminaire suivant : si $E \subset \mathbb{R}$ est un ensemble dénombrable et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de E dans $[0,1]$, alors il existe une sous-suite de (f_n) convergeant simplement vers $f : E \to [0,1]$. En particulier avec $E = \mathbb{Q}$, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que f_n converge simplement vers $f : \mathbb{Q} \to [0,1]$ sur $\mathbb{Q}$. Comme les f_n sont croissantes, f l'est également.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction croissante f admet une limite à gauche l^- et à droite l^+ en x. Supposons que $l^- = l^+ = l$, montrons que $f_n(x) \to l$. Soit $\varepsilon > 0$, fixons $\eta > 0$ tel que $\forall t \in \mathbb{Q} \cap [x-\eta, x+\eta], |f(t) - l| \leqslant \varepsilon$. Soit $\alpha \in [x-\eta, x] \cap \mathbb{Q}$ et $\beta \in [x, x+\eta]$. On a $f_n(\alpha) \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(\beta)$ et à partir d'un certain rang,
$$l - 2\varepsilon \leqslant f(\alpha) - \varepsilon \leqslant f_n(\alpha) \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(\beta) \leqslant f(\beta) + \varepsilon \leqslant l + 2\varepsilon$$
Donc $l - 2\varepsilon \leqslant f_n(x) \leqslant l + 2\varepsilon$ à partir d'un certain rang, de sorte que $(f_n(x))_n$ converge vers l.
- Montrons que l'ensemble D des points où la limite à gauche et à droite de f diffèrent est dénombrable. En effet, si $x \in D$, on peut fixer $q_x \in \mathbb{Q}$ tel que $l^-(x) < q_x < l^+(x)$. De plus, $x \mapsto q_x$ est injective car f est croissante, donc l^+ et l^- aussi. Ainsi, en utilisant à nouveau le résultat préliminaire avec $E = D$, on peut extraire une sous-suite de (f_n) convergeant simplement sur D. Comme (f_n) converge sur $\mathbb{R} \setminus D$, on a bien trouvé une sous-suite convergente sur $\mathbb{R}$.

□

Corollaire 2

Soit $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures de probabilités sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Si $(\mu_n)_n$ est tendue, c'est à dire $\forall \varepsilon > 0, \exists M_\varepsilon > 0, \limsup(1 - \mu_n([-M_\varepsilon, M_\varepsilon])) \leqslant \varepsilon$, alors il existe une sous-suite de (μ_n) convergeant étroitement vers une mesure de probabilité μ.

Démonstration. Notons $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de leurs fonctions de répartitions. Alors selon le théorème de Helly, il existe une fonction croissante $F : \mathbb{R} \to [-1,1]$ telle qu'une sous-suite $(F_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de (F_n) converge simplement vers G sur $\mathbb{R}$. Introduisons $F = \inf\{G(q), q > x\}$.

1 F est croissante.

2 F est continue à droite en tout point :

Soit $(x_n)_n$ suite décroissante convergeant vers x. Alors comme F est croissante, $\lim\limits_{x_n \to x} F(x_n) =$
$$\inf_{n\in\mathbb{N}} F(x_n) = \inf\{G(q) \mid \exists n \in \mathbb{N} : q > x_n\} \overset{G\text{ croissante}}{=} \inf\{G(q) \mid q > x\} = F(x)$$

3 $(F_{n_k})_k$ converge vers F en tout point de continuité x de F :

Soit $\varepsilon > 0$, soient $r_1 < r_2 < x < s$ tels que $F(x) - \varepsilon < F(r_1) \leqslant F(r_2) \leqslant F(x) \leqslant F(s) \leqslant F(x) + \varepsilon$. On a $F_{n_k}(r_2) \xrightarrow[k\to+\infty]{} G(r_2) \geqslant F(r_1)$ et $F_{n_k}(s) \xrightarrow[k\to+\infty]{} G(s) \leqslant F(s)$ car G est croissante.

Donc si k est assez grand, $F_{n_k}(r_2) \geqslant F(r_1) - \varepsilon$ et $F_{n_k}(s) \leqslant F(s) + \varepsilon$. Ainsi, par les inégalités précédentes et la croissance de F_{n_k}, $F(x) - 2\varepsilon \leqslant F_{n_k}(x) \leqslant F(x) + 2\varepsilon$ à partir d'un certain rang.

4 $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$:

Soit $\varepsilon > 0$ et $r < -M_\varepsilon, s > M_\varepsilon$ des points de continuité de F. Alors $1 - F(s) + F(r) = \lim_{k \to +\infty} 1 - F_{n_k}(s) + F_{n_k}(r) \leqslant \limsup_{n \to +\infty} 1 - F_n(M_\varepsilon) + F_n(-M_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ car (μ_n) est tendue.

En particulier, $0 \leqslant \limsup_{x \to +\infty} 1 - F(x) + F(-x) \leqslant \varepsilon$ donc, ceci valant pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{x \to +\infty} 1 - F(x) + F(-x) = 0$, ce qui prouve le résultat.

Par le théorème des caractérisation des fonctions de répartition (points **1,2** et **4**), la fonction F est bien la fonction de répartition d'une mesure de probabilité μ. Selon le point **3**, il y a bien convergence étroite de (μ_n) vers μ.

$\square$

Remarque.

- Le théorème de caractérisation des fonctions de répartition se trouve dans DURRETT 2010, p. 104. La clef de la preuve est de poser, F étant une fonction croissante continue à droite de limites 0 en $-\infty$, 1 en $+\infty$, $X(\omega) = \sup\{y : F(y) < \omega\}$ et de montrer que X est une variable aléatoire sur $\Omega = [0,1]$ de fonction de répartition F.
- La réciproque du corollaire est également vraie et se prouve de la même manière, par contraposée.
- Si il existe $\varphi \geqslant 0$ telle que $\varphi(x) \to +\infty$ et $\sup_n \int |\varphi(x)| \mathrm{d}\mu_n(x) < +\infty$, alors la suite (μ_n) est tendue.

Références :

- Serge FRANCINOU, Hervé GIANELLA et Serge NICOLAS (2009). *Exercices de mathématiques – Oraux X-ENS : Analyse 2*. Cassini, p. 166
- Rick DURRETT (2010). *Probability : Theory and Examples*. 4e éd. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, pp. 103-104