leçons : 202 : exemples de parties denses
209 : Approximation d'une fc° par des polynômes
249 : suites de va de Bernoulli indépendantes
260 : Espérance, variance et moments
262 : Modes de convergence d'une va
264 : va discrètes. Exemples et applications.
228 : Continuité et dérivabilité de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
241 : Suites et séries de fonctions

# Théorème (d'approximation) de Weierstrass (par les probas) 2

Références :

**lemme :** Soit $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \in [0,1]$, pour toute va. $X \sim B(p)$, pour toute suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de va iid de même loi que $X$, pour tout $n \geq n_0$, on a $\mathbb{P}\left[\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \eta\right] \leq \varepsilon$,

où $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

**Thm :** Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Soit $\varepsilon > 0$.
Alors il existe $Q$ une fonction polynômiale sur $[0,1]$ (ou sur $\mathbb{R}$ si on veut)
telle que $\|Q - f\|_{\infty,[0,1]} \leq \varepsilon$

<u>preuve du lemme :</u> Soit $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$.
Soit $p \in [0,1]$ un entier, $X \sim B(p)$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de va iid de même loi que $X$. On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Les $X_i$ sont $L^2$ donc $S_n$ aussi.

On a $\mathbb{E}\left[\frac{S_n}{n}\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_1] = p$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebicheff :

$$\mathbb{P}\left[\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \eta\right] \leq \frac{\mathbb{V}\left[\frac{S_n}{n}\right]}{\eta^2} = \frac{1}{n^2\eta^2}\mathbb{V}[S_n] = \frac{p(1-p)}{n\,\eta^2}$$

Or $\forall p \in [0,1]$ $\quad p(1-p) \leq \frac{1}{4}$

D'où $\mathbb{P}\left[\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \eta\right] \leq \frac{1}{4n\eta^2}$

Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\frac{1}{4n\eta^2} \leq \varepsilon$.

Ce $n_0$ convient □

<u>preuve du théorème :</u> Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$

1. $[0,1]$ est compact donc d'après le théorème de Heine :

$$\exists \eta > 0 \quad \forall x, y \in [0,1] \quad |x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

② Soit $p \in [0,1]$, $X \sim \mathcal{B}(p)$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de va iid de même loi que $X$. On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

On pose $$Q_n(p) = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]$$
$$= \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \mathbb{P}(S_n = k)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$Q_n$ est polynomiale sur $[0,1]$

③ $\forall p \in [0,1]$ $$|Q_n(p) - f(p)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(p)\right| \mathbb{P}(S_n = k)$$
$$\leqslant \sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right| \leqslant \eta} \underbrace{\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(p)\right|}_{\leqslant \varepsilon \text{ par } ①} \mathbb{P}(S_n = k) + \sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right| > \eta} \underbrace{\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(p)\right|}_{\leqslant 2\|f\|_\infty} \mathbb{P}(S_n = k)$$
$$\leqslant \varepsilon + 2\|f\|_\infty \times \mathbb{P}\left[\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \eta\right]$$

On applique le lemme : soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ $\forall p \in [0,1]$
$$\mathbb{P}\left[\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \eta\right] \leqslant \varepsilon$$

$$\forall p \in [0,1] \quad |Q_n(p) - f(p)| \leqslant \underbrace{(1 + 2\|f\|_\infty)}_{\text{ne dépend que de } f} \varepsilon$$

$$\|Q_n - f\|_{\infty, [0,1]} \leqslant (1 + 2\|f\|_\infty)\varepsilon \qquad \square$$