

Applications des séries en théorie des nombres

Corentin Fierobe, juin 2017

Ce développement montre une application directe des séries pour prouver qu'un nombre est irrationnel ou transcendant. Les résultats démontrés reposent en grande partie sur le fait que les restes des séries considérées tendent "trop vite" vers 0.

Il est en deux parties, à savoir :

1. Une preuve que e est irrationnel.
2. La construction (explicite) d'un nombre transcendant.

Pour ce qui est des références : il n'y en a pas. Cependant, pour les recherches, on peut regarder aux entrées :

- *critère d'irrationalité*
- *critère de transcendance*
- *nombres de Liouville.*

1 e est irrationnel

Pour prouver que e est irrationnel, on a besoin du

Lemme 1.1 *Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe deux suites $(x_n)_n, (y_n)_n \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ telles que pour tout n , $y_n a + x_n \neq 0$ et $y_n a + x_n \rightarrow 0$. Alors a est irrationnel.*

Preuve du lemme. Soit $a \in \mathbb{Q}$. On pose $a = \frac{p}{q}$ où $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. Pour $u, v \in \mathbb{Z}$ ($v \neq 0$) avec $ux + v \neq 0$, on a

$$0 \neq |vx + u| = \frac{|vp + uq|}{|q|}$$

et comme $|vp + uq|$ est un entier non nul, il est supérieur à 1. D'où $|vx + u| \geq \frac{1}{|q|}$. Donc les hypothèses du lemme ne peuvent pas être vérifiées pour a rationnel, ce qui prouve le résultat par contraposée. $\square$

Preuve de l'irrationalité de e . On définit pour tout n , les entiers $q_n = n!$ et $p_n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!}$, de sorte que

$$0 \neq q_n e - p_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^k} = \frac{1}{n+1} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} \rightarrow 0.$$

Donc $e \notin \mathbb{Q}$. $\square$

2 Existence de nombres transcendants (construction explicite)

De même que précédemment, on commence par un lemme.

Lemme 2.1 *Soit $a \in \mathbb{R}$ un nombre algébrique. Il existe $d \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$,*

$$\frac{p}{q} \neq a \Rightarrow |a - \frac{p}{q}| \geq \frac{C}{q^d}.$$

Preuve du lemme. Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ le polynôme minimal de a . On pose $d = \deg P$ et on se donne $l \in \mathbb{Z}$ non nul tel que $Q := lP \in \mathbb{Z}[X]$. Comme a est racine simple de Q , il existe $r > 0$ tel que

$$\forall x \in [a - r, a + r] \setminus \{a\} \quad Q(x) \neq 0.$$

Mais alors, par l'inégalité des accroissements finis, on dispose de $M > 0$ tel que $\forall x \in [a - r, a + r] \quad |Q(x) - Q(a)| = |Q(x)| \leq M|x - a|$, ie $|x - a| \geq M^{-1}|Q(x)|$. Si $\frac{p}{q} \in [a - r, a + r] \setminus \{a\}$, on a, en posant $Q = \sum_{k=0}^d b_k X^k$,

$$0 \neq |Q(\frac{p}{q})| = \frac{|\sum_{k=0}^d b_k p^k q^{n-k}|}{q^d} \geq \frac{1}{q^d}$$

par le même argument que précédemment. D'où $|\frac{p}{q} - a| \geq \frac{1}{Mq^d}$ et on a le résultat en posant $C = \min(\frac{1}{M}, r)$. $\square$

Construction d'un nombre transcendant. Montrons que

$$a = \sum_{k=0}^{\infty} 10^{-k!}$$

est transcendant. On définit pour tout n , les entiers $q_n = 10^{n!}$ et $p_n = \sum_{k=0}^n 10^{n!-k!}$, de sorte que

$$0 \neq |a - \frac{p_n}{q_n}| = \sum_{k=n+1}^{\infty} 10^{-k!} \leq 10^{-(n+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} 10^{-k} = \frac{10}{9} 10^{-(n+1)!} = \frac{10}{9} \frac{1}{q_n^{n+1}}$$

ce qui contredit le lemme précédent : a est donc transcendant. $\square$