S. Méléard

Temps d'arrêt

Exercice : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{B}er(p)$, $p\in]0;1[$. Notons A_n l'événement $X_{n-1}\neq X_n$ pour $n\neq 2$ et appelons T la variable aléatoire $T = \inf\{n\in\mathbb{N} / A_n \text{ soit vérifié}\}$. Alors

1. Les A_n sont indépendantes ssi $p=\frac{1}{2}$
2. $\mathbb{P}(T<+\infty)=1$
3. $\mathbb{P}((X_T; X_{T+1})=(0;1)) = p^2$

Démonstration : ① Soient $n\neq m$ supérieurs à 2.

Alors si $|n-m|>1$, les ensembles $\{n-1;n\}$ et $\{m-1;m\}$ sont disjoints. Les v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant indépendantes, les v.a. $\mathbb{1}_{X_{n-1}\neq X_n}$ et $\mathbb{1}_{X_{m-1}\neq X_m}$ le sont aussi.

Donc
$$\mathbb{P}(A_n\cap A_m) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{X_{n-1}\neq X_n}\mathbb{1}_{X_{m-1}\neq X_m}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{X_{n-1}\neq X_n})\mathbb{E}(\mathbb{1}_{X_{m-1}\neq X_m})$$
$$= \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(A_m)$$

Sinon, alors par exemple $n>m$ et $n=m+1$.

Et alors
$$\mathbb{P}(A_{m+1}\cap A_m) = \mathbb{P}(X_{m-1}\neq X_m\neq X_{m+1})$$
$$= \mathbb{P}(X_{m-1}=0 \cap (X_{m-1}\neq X_m\neq X_{m+1}) \coprod X_{m-1}=1\cap(\cdots))$$
$$\underset{\substack{\perp\!\!\!\perp \text{ de } X_{m-1}\\ X_m\\ X_{m+1}}}{=} \mathbb{P}(X_{m-1}=0\cap X_m=1\cap X_{m+1}=0)+\mathbb{P}(X_{m-1}=1\cap X_m=0\cap X_{m+1}=1)$$
$$= p(1-p)^2+(1-p)p^2$$
$$= p(1-p)$$

Or
$$\mathbb{P}(A_m) = \mathbb{P}(X_{m-1}\neq X_m) \underset{\text{idem qu'au dessus}}{=} \mathbb{P}(X_{m-1}=0\cap X_m=1)+\mathbb{P}(X_{m-1}=1\cap X_m=0)$$
$$= 2p(1-p) = \mathbb{P}(A_{m+1})$$

Donc
$$\mathbb{P}(A_{m+1}\cap A_m) = \mathbb{P}(A_m)\mathbb{P}(A_{m+1}) \iff p(1-p) = 4p^2(1-p)^2$$
$$\iff p(1-p)=\frac{1}{4} \quad (\text{car } p\neq\{0;1\})$$
$$\iff p=\frac{1}{2}, \text{ ce qui montre ①.}$$

② Calculons $\mathbb{P}(T=n)$. Si $n \geq 2$

$T=n \iff X_1 = \dots = X_{n-1} \neq X_n$

Donc comme précédemment, en partitionnant suivant les valeurs de X_1,

$$\mathbb{P}(T=n) = \mathbb{P}(X_1=0 \cap \dots \cap X_{n-1}=0 \cap X_n=1) + \mathbb{P}(X_1=1 \cap \dots \cap X_{n-1}=1 \cap X_n=0)$$
$$= (1-p)^{n-1} p + p^{n-1}(1-p)$$

Donc
$$\mathbb{P}(T<+\infty) = \sum_{n\geq 2} p(1-p)^{n-1} + \sum_{n\geq 2} p^{n-1}(1-p)$$
$$= p \sum_{n\geq 1} (1-p)^n + (1-p)\sum_{n\geq 1} p^n = p \times \frac{1-p}{1-(1-p)} + (1-p)\frac{p}{1-p}$$
$$= 1.$$

③ $$\{X_T=0, X_{T+1}=1\} = \coprod_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n\geq 2}} \{X_T=0, X_{T+1}=1\} \cap \{T=n\}$$
car $T<+\infty$ p.s.

Donc
$$\mathbb{P}((X_T;X_{T+1})=(0;1)) = \sum_{n\geq 2} \mathbb{P}(T=n \cap X_n=0 \cap X_{n+1}=1)$$
$$= \sum_{n\geq 2} \mathbb{P}(X_1=\dots=X_{n-1}=1=X_{n+1} \cap X_n=0)$$
$$= \sum_{n\geq 2} p^{n-1} \times (1-p)p = 1-p \sum_{n=2}^{\infty} p^n$$
$$= \frac{p^2}{1-p} \times (1-p) = p^2.$$

Donc $\mathbb{P}((X_T;X_{T+1})=(0;1)) = p^2$ et de même $\mathbb{P}((X_T;X_{T+1})=(1;0)) = (1-p)^2$.