# Monte Carlo

**Théorème :** Soit $P = [0,1]^d$ muni de la mesure de Lebesgue. Soit $f \in L^1(P)$ et $(X_1 \cdots X_n)$ des v.a. i.i.d. de loi uniforme sur $P$. Soit $e_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(X_i) - \int_P f$.
Alors ① $e_N \xrightarrow{p.s.} 0$
② Si de plus, il existe $A$ et $B$ tels que $|f| \leq A$ p.p. et $|\int f^2| \leq B$ alors $\forall \beta \in [0, \frac{B}{A^2}]$, $\mathbb{P}(|e_N| \geqslant \beta A) \leq 2\exp\left(\frac{-N\beta^2 A^2}{4B}\right)$.

Démonstration : ① Espérance de $f(X_i)$ : $\mathbb{E}(f(X_i)) = \int_P f(\omega)\, d\mathbb{P}_{X_i}(\omega)$
Or, la loi de $X_i$ est l'uniforme sur $P$. Donc $\mathbb{E}(f(X_i)) = \int_P f(x)\,dx$
$= \int_P f$.

Loi des grands nombres : Les v.a. $f(X_i)$ sont 2 à 2 indépendantes de même loi et intégrables.
En appliquant la loi forte des grands nombres, $e_N \xrightarrow{p.s.} 0$.

② Premières estimations sur $\mathbb{P}(e_N \geqslant \beta A)$ : Soit $\alpha > 0$

$$\mathbb{P}(e_N \geqslant \beta A) \underset{\substack{\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* \text{ est bijective} \\ \text{et } \alpha > 0}}{=} \mathbb{P}(\exp(\alpha e_N) \geqslant \exp(\alpha\beta A)) \underset{\text{Markov}}{\leq} \frac{\mathbb{E}(\exp(\alpha e_N))}{e^{\alpha\beta A}}.$$

Or, $\mathbb{E}(\exp(\alpha e_N)) = \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{\alpha}{N}\sum_{i=1}^{N} f(X_i) - \frac{N}{N}\int f\right)\right) = \mathbb{E}\left(e^{\frac{\alpha}{N}\sum_{i=1}^{N}(f(X_i) - \int f)}\right)$.
$= \mathbb{E}\left(e^{\frac{\alpha}{N}(f(X_1) - \int f)}\right)^N$

$\forall |t| \leq 1$, $e^t \leq 1 + t + t^2$. En effet, si $\varphi(t) = e^{-t}(1+t+t^2)$
$\varphi'(t) = e^{-t}(2t + \cancel{1} - 1 - t - t^2) = e^{-t}(t - t^2)$ Donc $\varphi$ est décroissante sur $[-1, 0]$ et croissante sur $[0, 1]$ et $\varphi(0) = 1$. Donc $\forall |t| \leq t$, $\varphi(t) \geqslant 1$ et $(1 + t + t^2) \geqslant e^t$.

Application de cette inégalité : p.p. $|f(x) - \int_P f(x)\,dx| \leq 2A$ par inégalité triangulaire. Donc si $\alpha \leq \frac{N}{2A}$, on obtient :

$$\mathbb{E}(\exp(\alpha e_N)) \leq \mathbb{E}\left(1 + \frac{\alpha}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(f(X_i) - \int_P f\right) + \frac{\alpha^2}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{N} f(X_i) - \int_P f\right)^2\right).$$

Donc $\mathbb{E}(\exp(\alpha e_N)) \leq \left[\mathbb{E}\left(1 + \frac{\alpha}{N}\left(f(X_1) - \int_p f\right) + \frac{\alpha^2}{N^2}\left(f(X_1) - \int_p f\right)^2\right)\right]^N$

et $\mathbb{E}\left(f(X_1) - \int_p f\right) = 0$

$$\leq \left[1 + \frac{\alpha^2}{N^2}\left(\mathbb{E}\left(\left(f(X_1) - \int_p f\right)^2\right)\right)\right]^N$$

$$\leq \left[1 + \frac{\alpha^2}{N^2}\underbrace{\left(\mathbb{E}(f(X_1)^2) - \mathbb{E}(f(X_1))^2\right)}_{\leq \mathbb{E}(f(X_1)^2) \leq B.}\right]^N$$

$$\leq e^{\frac{\alpha^2}{N}B}$$

Donc $\mathbb{P}(e_N \geq \beta A) \leq \exp(-\alpha\beta A)\exp\left(\alpha^2 \frac{B}{N}\right)$ pour tout $\alpha \leq \frac{N}{2A}$.

Optimisation du $\alpha$ : on cherche $\alpha_0$ qui minimise $\alpha^2 \frac{B}{N} - \alpha\beta A$.

$\alpha_0 = \frac{\beta A N}{2B}$. On a $\alpha_0 \leq \frac{N}{2A} \Leftrightarrow \frac{\beta A}{B} \leq \frac{1}{A} \Leftrightarrow \beta \leq \frac{B}{A^2}$.

Donc $\forall \beta \in \left[0; \frac{B}{A^2}\right]$ $\mathbb{P}(e_N \geq \beta A) \leq \exp\left(-\frac{\beta^2 A^2 N}{2B} + \frac{\beta^2 A^2 N^2}{4BN}\right)$

Donc $\forall \beta \in \left[0; \frac{B}{A^2}\right]$, $\mathbb{P}(e_N \geq \beta A) \leq \exp\left(\frac{-N\beta^2 A^2}{4B}\right)$.

De meme une estimation de $\mathbb{P}(-e_N \leq -\beta A)$ (valide car on prend $\alpha \leq 0$ et $e^t \leq 1 + t + t^2$ est valable pour $|t| \leq 1$) nous donne $\mathbb{P}(-e_n \leq -\beta A) \leq \exp\left(\frac{-N\beta^2 A^2}{4B}\right)$

Donc $\mathbb{P}(|e_N| \geq \beta A) \leq 2\exp\left(\frac{-N\beta^2 A^2}{4B}\right)$.

Remarques : • $\sum \exp(-CN\varepsilon^2)$ converge. Donc par Borel Cantelli, on retrouve que $|e_N| \xrightarrow{p.s.} 0$.

• Cette méthode est efficace pour l'intégrale de fonctions peu régulières ou pour $d$ grand où Newton-Cotes ne s'applique pas ou moins bien.