Rouvière, ex 66 (p. 201) et ex 114 (p. 344)

Lemme de Morse

Lemme (Réduction des formes quadratiques) : Soit $A_0 \in S_n(\mathbb{R})$ inversible. Il existe un voisinage V de A_0 dans S_n et une application $A \mapsto M$ de V dans $GL_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que, pour tout $A \in V$, on ait $A = {}^tMA_0M$.

Démonstration : On pose $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & S_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & {}^tMA_0M \end{array}$. Alors φ est polynomiale,

donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\varphi(I_n + H) = {}^t(I_n+H)A_0(I_n+H)$

$$= \varphi(I_n) + {}^tHA_0 + A_0H + o(\|H\|),$$

donc $d\varphi_{I_n}(H) = {}^tHA_0 + A_0H$ pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On a donc $\ker d\varphi_{I_n} = \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,/\, A_0H \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})\}$, qui est de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.

Par théorème du rang, on a $\operatorname{rg} d\varphi_{I_n} = \frac{n(n+1)}{2} = \dim S_n(\mathbb{R})$. De plus, $\operatorname{Im} d\varphi_{I_n} \subset S_n(\mathbb{R})$,

donc $d\varphi_{I_n} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n(\mathbb{R})$ est surjective.

On pose ensuite $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,/\, A_0M \in S_n(\mathbb{R})\}$, qui est un supplémentaire de $\ker d\varphi_{I_n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puis $\psi : F \longrightarrow S_n(\mathbb{R})$ la restriction de φ à F.

On a $\ker d\psi_{I_n} = \ker d\varphi_{I_n} \cap F = \{0\}$, donc $d\psi_{I_n}$ est injective, donc bijective, car $\dim F = \dim S_n(\mathbb{R})$. Par théorème d'inversion locale, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de I_n dans F (que l'on peut supposer être dans $GL_n(\mathbb{R})$) tel que ψ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{V} = \psi(\mathcal{U})$, qui est un voisinage ouvert de $A_0 = \varphi(I_n) = \psi(I_n)$ dans $S_n(\mathbb{R})$.

Pour tout $A \in \mathcal{V}$, il existe donc une unique matrice (inversible) $M \in \mathcal{U}$ telle que $A = {}^tMA_0M$, et l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathcal{U} \\ A & \longmapsto & M = \psi^{-1}(A) \end{array}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{V}$.

Lemme de Morse : Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^m$ contenant l'origine, et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ sur U. On suppose que $df_0 = 0$, et que la forme quadratique $d^2 f_0$ est non dégénérée, de signature $(p, m-p)$. Alors il existe un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme φ entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^m$ tel que $\varphi(0) = 0$ et :

$$f(x) - f(0) = \varphi_1(x)^2 + \dots + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - \dots - \varphi_m(x)^2,$$

où $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x))$.

Démonstration : La formule de Taylor avec reste intégral permet d'écrire :

$$f(x) - f(0) = {}^t x\, Q(x)\, x, \quad \text{avec } Q(x) = \int_0^1 (1-t)\, d^2 f_{tx}\, dt .$$

Comme f est $\mathcal{C}^3$ sur U, Q est $\mathcal{C}^1$ sur U. Le lemme précédent permet de fixer un voisinage U' de 0 dans $\mathbb{R}^m$ et une fonction $M : U' \longrightarrow GL_m(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que, pour tout $x \in U'$, on ait $Q(x) = {}^t M(x)\, Q(0)\, M(x)$.

Ceci donne, pour tout $x \in U'$, $f(x) - f(0) = {}^t(M(x)x)\, Q(0)\, (M(x)x)$.

Or $Q(0) = \frac{1}{2} d^2 f_0$ est de signature $(p, m-p)$, donc il existe $A \in GL_m(\mathbb{R})$ tel que $Q(0) = {}^t A\, \Delta_{p,m-p}\, A$, où $\Delta_{p,m-p} = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{p \text{ fois}}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{m-p \text{ fois}})$.

Pour tout $x \in U'$, on a donc $f(x) - f(0) = {}^t(AM(x)x)\, \Delta_{p,m-p}\, (AM(x)x)$.

On pose enfin $\varphi : \begin{array}{ccc} U' & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ x & \longmapsto & AM(x)x \end{array}$, qui est une application $\mathcal{C}^1$,

vérifiant $d\varphi_0(h) = AM(0)h$ pour tout $h \in \mathbb{R}^m$. La différentielle de φ en 0 étant inversible, le théorème d'inversion locale permet de fixer un voisinage V de 0 tel que φ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de V sur $W = \varphi(V)$.

On a bien $\varphi(0) = 0$ et, pour tout $x \in V$, $f(x) - f(0) = \varphi_1(x)^2 + \dots + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - \dots - \varphi_m(x)^2$.