Références :
Analyse fonctionnelle, Haïm Brezis

Théo. *L_p est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$.*

Démonstration.

- Supposons d'abord que $p = \infty$. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans L^∞. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $N_k \in \mathbb{N}$ tel que

$$||f_m - f_n||_{L^\infty} \leq \frac{1}{k} \text{ pour } m, n \geq N_k.$$

Donc il existe E_k négligeable tel que

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \text{ pour tout } x \in \Omega \backslash E_k \text{ et pour tout } m, n \geq N_k.$$

Posons $E = \bigcup_k E_k$ (E est négligeable), on voit que pour tout $x \in \Omega \backslash E$, la suite $f_n(x)$ est de Cauchy (dans $\mathbb{R}$ qui est complet).
On obtient donc $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ pour tout $x \in \Omega\backslash E$. On passe à la limite dans l'inégalité quand $m \to \infty$ et on a, pour tout $x \in \Omega \backslash E$ et pour tout $n \geq N_k$

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}.$$

Ainsi, $f \in L^\infty$ et $||f - f_n||_{L^\infty} \leq \frac{1}{k}$, pour tout $n \geq N_k$. Par conséquent, $||f - f_n||_{L^\infty} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

- Supposons maintenant que $1 \leq p < \infty$. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans L^p. Pour conclure, il suffit de montrer que cette suite admet une valeur d'adhérence.
On extrait une sous-suite (f_{n_k}) telle que, pour tout $k \geq 1$,

$$||f_{n_{k+1}} - f_{n_k}||_{L^p} \leq \frac{1}{2^k}$$

On va montrer que f_{n_k} converge dans L^p. Pour simplifier les notations, on écrit f_k au lieu de f_{n_k}, on a donc, pour $k \geq 1$,

$$||f_{k+1} - f_k||_{L^p} \leq \frac{1}{2^k}.$$

Posons

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|$$

et on obtient

$$\begin{aligned} ||g_n||_{L^p} &\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \\ &\leq \frac{1 - \frac{1}{2}^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &\leq 2 \end{aligned}$$

Par le théorème de convergence monotone, on a que (g_n) converge presque partout sur Ω vers une fonction $g \in L^p$. D'autre part, on a pour $m \geq n \geq 2$ et

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &\leq |f_m(x) - f_{m-1}(x)| + ... + |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \\ &\leq g_m(x) - g_{n-1}(x) \\ &\leq g(x) - g_{n-1}(x) \\ &\leq g(x) \end{aligned}$$

On sait que $f_n(x)$ est de Cauchy et converge vers une limite notée $f(x)$. On a presque partout sur Ω et pour $n \geq 2$,

$$|f(x) - f_n(x)| \leq g(x).$$

On a donc que $f \in L^p$. On a, de plus, $|f_n(x) - f(x)|^p \longrightarrow 0$ p.p et $|f_n(x) - f(x)|^p \leq g^p(x)$ majorante et intégrable. Par le théorème de convergence dominée, on a le résultat.

□

Leçons possibles : 234