Références :
Probabilités 2, Jean-Yves Ouvrard

Théo (Levy)**.** *Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Alors on a*

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}^d, \phi_{X_n}(t) \longrightarrow \phi_X(t).$$

Théo. *Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une famille finie $\{A_{n,j}, 1 \leq j \leq M_n\}$ d'évènements indépendants définis sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On pose $\mathbb{P}(A_{n,j}) = p_{n,j}$ et on note*

$$S_n = \sum_{i=1}^{M_n} \mathbb{1}_{A_{n,j}}.$$

On suppose que

- *(M_n) tend en croissant vers $+\infty$*
- $\max\limits_{1 \leq j \leq M_n} p_{n,j} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$
- $\sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \lambda > 0.$

Alors la suite (S_n) converge en loi vers la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Démonstration. On va utiliser le théorème de Levy. On a, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\phi_{S_n}(t) &= \mathbb{E}\left[e^{itS_n}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[e^{it\sum_{i=1}^{M_n} \mathbb{1}_{A_{n,j}}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{M_n} e^{it\mathbb{1}_{A_{n,j}}}\right] \\
&= \prod_{i=1}^{M_n} \mathbb{E}\left[e^{it\mathbb{1}_{A_{n,j}}}\right] \text{ par indépendance des } (A_{n,j}) \text{ pour } j \in [\![1, M_n]\!] \\
&= \prod_{i=1}^{M_n} (e^{it} p_{n,j} + 1 - p_{n,j}) \\
&= \prod_{i=1}^{M_n} (1 + p_{n,j}(e^{it} - 1)) \\
&= \prod_{i=1}^{M_n} (1 + p_{n,j} z) \text{ en notant } z = e^{it} - 1.
\end{aligned}$$

Si log est la détermination principale du logarithme complexe, il résulte de la formule de Taylor avec reste intégrale que, pour tout $|x| < 1$, on a

$$\log(1+x) = x - x^2 \int_0^1 \frac{1-u}{(1+ux)2} du.$$

Comme $\max\limits_{1 \leq j \leq M_n} p_{n,j} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|p_{n,j} z| \leq \frac{1}{2}$.
Ainsi, $\log(1 + p_{n,j} z)$ est bien défini.
Pour $n \geq n_0$, on a alors

$$\log(\phi_{S_n}(t)) = z \sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j} - z^2 \sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j}^2 \int_0^1 \frac{1-u}{(1+up_{n,j}z)^2} du.$$

On a

$$|1 + up_{n,j}| \geq 1 - p_{n,j}|z| \geq \frac{1}{2}.$$

On a, pour tout $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j}^2 \int_0^1 \frac{1-u}{(1+up_{n,j}z)^2} du\right| &\leq \left|\sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j}^2 \int_0^1 4(1-u)du\right| \\
&\leq 4 \underbrace{\left[\max_{1\leq j\leq M_n} p_{n,j}\right]}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0} \underbrace{\left[\sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j}\right]}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda}. \\
&\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

On a donc obtenu que

$$\lim_{n\to\infty} \left|\log(\phi_{S_n}(t)) - \sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j} z\right| = 0.$$

Ainsi, grâce aux hypothèses, on a

$$\lim_{n\to\infty} \log(\phi_{S_n}(t)) = z\lambda.$$

Par conséquent, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \phi_{S_n}(t) = e^{\lambda z} = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

Or, si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\phi_X(t) &= \mathbb{E}[e^{itX}] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \left(e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}\right) \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(e^{it}\lambda)^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} e^{e^{it}\lambda} \\
&= e^{\lambda(e^{it}-1)}
\end{aligned}$$

On a donc le résultat avec le théorème de Levy. $\square$

<u>Leçons possibles</u> : 261 - 264