216 Etude d'une courbe
220 EDO qualitatif

Etude d'une courbe.

Théorème : Soit $\gamma : [a;b] \to \mathbb{R}^2$ courbe C^3 paramétrée par longueur d'arc.
On suppose que $\forall s \in [a;b]$ $R(s) > 0$ et $R'(s) \geq 0$.

1) Si $s_1 < s_2$, $D_{s_2} \subsetneq D_{s_1}$

2) Si A est la couronne ouverte comprise entre D_b et D_a, si $x \in A$, $\exists ! \, C_s$ osculateur à γ en $\gamma(s)$ tel que $x \in C_s$.

1) Soit $\omega : \begin{array}{l} [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ s \longmapsto \omega(s) \end{array}$, centre du cercle osculateur en $\gamma(s)$.

Alors $\omega(s) = \gamma(s) \boxed{+} R(s) N(s)$ (+) car $N(s)$ est dirigé suivant la concavité.

Donc $\omega(s) = \gamma(s) + R(s) N(s)$ et $\omega'(s) = T(s) + R'(s) N(s) + R(s) N'(s)$

Or, $\begin{cases} \langle T; N \rangle = 0 \\ \langle N; N \rangle = 1 \end{cases}$. Donc $\begin{cases} \langle T; N' \rangle + \langle k N; N' \rangle = 0 \\ \langle N; N' \rangle = 0 \end{cases}$

Donc $N'(s) = -k(s) T(s)$.

Donc $\omega'(s) = T(s) \underbrace{(1 - k(s) R(s))}_{=0} + R'(s) N(s) = R'(s) N(s)$.

Donc $\| \omega(s_2) - \omega(s_1) \| \leq \int_{s_1}^{s_2} \underbrace{|R'(s)|}_{} ds = -\int_{s_1}^{s_2} R'(s) ds = R(s_1) - R(s_2)$

Donc $\| \omega(s_2) - \omega(s_1) \| \leq R(s_1) - R(s_2)$.

De plus, on a égalité, comme $R' \neq 0$, que si $R'(s) N(s)$ garde même direction, et même sens, i.e. ssi $N = cste$, i.e. si $k = 0$ ce qui est impossible.

Donc $\| \omega(s_2) - \omega(s_1) \| < R(s_1) - R(s_2)$

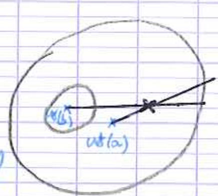
Ceci exprime bien le fait que $D_{s_2} \subset D_{s_1}$

2) Soit $\varphi_x : \begin{array}{l} [a;b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ s \longmapsto \| \omega(s) - x \| - R(s) \end{array}$ avec $x \in A$.

$\varphi_x(b) = \| \omega(b) - x \| - R(b) \geq 0$

$\varphi_x(a) = \| \omega(a) - x \| - R(a) \leq 0$

Donc, il existe, par le TVI un s_x de $[a;b]$ tel que $\varphi_x(s_x) = 0$.



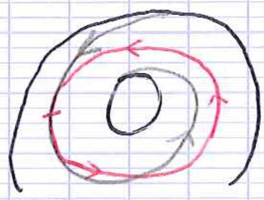
$\varphi_x(s_x) = \|\omega(s_x) - x\| - R(s_x) = 0$ $\quad x \in C_{s_x}$

De plus, si $x \in C_{s'}$, alors si $s' > s_x$, alors $D_{s'} \subsetneq D_{s_x}$ et x ne peut appartenir à $C_{s'}$ ⊕ idem si $s' < s_x$

Donc s_x est unique.

Application : Soit X le champ de vecteur sur A défini par $X(x)$ est positivement tangent à C_{s_x} et $\|X(x)\| = 1$.

Le problème de Cauchy $\begin{cases} \dot{x} = X(x) \\ X(0) = \gamma(s) \ ; s \in]a;b[\end{cases}$



admet 2 solutions distinctes maximales.

1) $x_1 :]s-a ; b-s[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ est solution

$\qquad t \longmapsto \gamma(s+t)$

En effet, $\frac{dx}{dt} = \gamma'(s+t) = X(\gamma(s+t)) = X(x(t))$

2) $x_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$

$\qquad t \longmapsto \omega(s) + e^{\frac{it}{R(s)}} (\gamma(s) - \omega(s))$

$\frac{dx}{dt} = \frac{i}{R(s)} (\gamma(s) - \omega(s)) e^{\frac{it}{R(s)}}$ $\qquad$ Donc $\left|\frac{dx}{dt}\right| = 1$ et x est tangent au cercle.

Donc x_2 est solution.