

* Représentation des fonctions lipschitziennes: degni 201, 203, 228, 234 (205)

[Brezis] p. 124-126
on a fait un peu
adopter

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, alors:

f est lipschitzienne $\Leftrightarrow \exists g \in L^\infty, \forall x \in \mathbb{R}: f(x) = f(0) + \int_0^x g(t) dt$

+ [Hirsch-Luxemburg]
VIII, §2: exo. 3

preuve:

$$\Leftrightarrow |f(y) - f(x)| = \left| \int_x^y g(t) dt \right| \leq \int_x^y |g(t)| dt \leq \|g\|_\infty |y - x|$$

$\Rightarrow$ Notons k la constante de lipschitz de f .

Posons $\Lambda: \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{C}}$ qui est une forme linéaire
 $\varphi \mapsto -\int_{\mathbb{R}} f \varphi'$

Montrons: $\exists C > 0, \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}): |\Lambda(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_1$

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$, et $K \subseteq \mathbb{R}$ compact tq $x \notin K \Rightarrow \varphi(x) = 0$ Notons $K^* := \{x \in \mathbb{R}, d(x, K) \leq 1\}$

Soit $h \in]0, 1[$:

$$\text{On a d'une part: } \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \varphi(x) dx = \frac{1}{h} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x+h) \varphi(x) dx - \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx \right)$$

$$= \frac{1}{h} \left(\int_{\mathbb{R}} f(u) \varphi(u-h) du - \int_{\mathbb{R}} f(u) \varphi(u) du \right)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(u) \frac{\varphi(u-h) - \varphi(u)}{h} du$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(u) \frac{\varphi(u-h) - \varphi(u)}{h} du$$

Dev. Ona 5:

Or, $\forall u \in \mathcal{K}^+$: $f(u) \frac{(u-h)-f(u)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} -f(u)f'(u)$ et $\forall u \in \mathcal{K}^+$, $\forall h \in \mathcal{D}(f)$: $|f(u) \frac{(u-h)-f(u)}{h}| \leq \|f\|_{\infty, \mathcal{K}^+} \|f'\|_{\infty}$

Donc, par TCD: $\int_{\mathcal{K}^+} f(u) \frac{(u-h)-f(u)}{h} du \xrightarrow{h \rightarrow 0} -\int_{\mathcal{K}^+} f(u)f'(u) du$

Or, φ' est à support dans $\mathcal{K} \in \mathcal{K}^+$ donc: $-\int_{\mathcal{K}^+} f(u)f'(u) du = -\int_{\mathbb{R}} f\varphi' = \Lambda(\varphi)$

i.e.: $\int_{\mathbb{R}} \frac{f(u,h)-f(u)}{h} \varphi(u) du \xrightarrow{h \rightarrow 0} \Lambda(\varphi)$

Or, $\forall h \in \mathcal{D}(f)$: $|\int_{\mathbb{R}} \frac{f(u,h)-f(u)}{h} \varphi(u) du| \leq \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\frac{|f(u,h)-f(u)|}{h}}_{\leq k} |\varphi(u)| du$
 $\leq k \int_{\mathbb{R}} |\varphi| = k \|\varphi\|_1$

Et donc: $|\Lambda(\varphi)| \leq k \|\varphi\|_1$

Ainsi, Λ est continue pour $\|\cdot\|_1$.

Or, $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$ donc Λ se prolonge en $\Lambda: L^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ forme linéaire continue.

Par la dualité L^1-L^∞ : $\exists g \in L^\infty(\mathbb{R})$ tq $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ ($L^1(\mathbb{R})$ même): $-\int_{\mathbb{R}} f\varphi' = \Lambda(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} g\varphi$

Posons $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \int_0^x g(t) dt$. Montrons que $\int_{\mathbb{R}} g\varphi = -\int_{\mathbb{R}} G\varphi'$ $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$: $\int_{\mathbb{R}} G\varphi' = \int_{\mathbb{R}} \int_0^x \varphi'(t) g(t) dt dx$
 $= \int_0^{+\infty} \int_0^x \varphi'(t) g(t) dt dx - \int_{-\infty}^0 \int_x^0 \varphi'(t) g(t) dt dx$
 $= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \underbrace{\varphi'(t) g(t)}_{=U(t,x)} 1_{t \leq x} dt dx - \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 \underbrace{\varphi'(t) g(t)}_{=V(t,x)} 1_{t \geq x} dt dx$

$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} |U(t,x)| dt dx = \int_0^{+\infty} \int_0^x |\varphi'(t)| |g(t)| dt dx = \int_0^{+\infty} |\varphi'(t)| \int_0^x |g(t)| dt dx < +\infty$ car $|\varphi'|$ à supp. comp.

Donc, par Fubini-Tonelli: $U \in L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$.

Ainsi, par Fubini-Lebesgue: $\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} U(t,x) dt dx = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} U(t,x) dx dt$
 $= \int_0^{+\infty} \int_t^{+\infty} \varphi'(t) g(t) dx dt$
 $= -\int_0^{+\infty} \varphi(t) g(t) dt$

De même: $-\int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 V(t,x) dt dx = -\int_{-\infty}^0 \varphi(t) g(t) dt$

Et on a bien: $\Lambda(\psi) = \int_{\mathbb{R}} g \psi = - \int_{\mathbb{R}} G \psi'$

Answer: $\forall \psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$: $\int_{\mathbb{R}} (G-f) \psi' = 0$ (*)

Soit $\theta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ tq $\int_{\mathbb{R}} \theta = 1$ et $\theta \geq 0$

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$: $\tilde{\varphi} := \varphi - (\int_{\mathbb{R}} \varphi) \theta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ et vérifie: $\int_{\mathbb{R}} \tilde{\varphi} = 0$

Answer, $\exists \psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ tq $\tilde{\varphi} = \psi'$ ($\psi(x) = \int_{-\infty}^x \tilde{\varphi}(t) dt$)

Donc, par (*):

$$\int_{\mathbb{R}} (G-f) \tilde{\varphi} = 0$$

$$\text{i.e.: } \int_{\mathbb{R}} (G-f) \tilde{\varphi} = \int_{\mathbb{R}} \tilde{\varphi} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} (G-f) \theta}_{=: C \in \mathbb{R}} = 0$$

Donc, en posant $\tilde{G} := G - C$, on a:

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$$

$$\int_{\mathbb{R}} (\tilde{G}-f) \varphi = 0.$$

Soit $\forall n \in \mathbb{N}$: $[-n, n] \subset \chi_n \subset]-n+1, n+1[$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\chi_n (\tilde{G}-f) \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ donc:

$$\int_{\mathbb{R}} (\tilde{G}-f)^2 \chi_n = 0.$$

Alors, par Fatou; comme les fonctions sont positives:

$$\int_{\mathbb{R}} \underbrace{\liminf_{n \rightarrow \infty} ((\tilde{G}-f)^2 \chi_n)}_{=(\tilde{G}-f)^2} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} (\tilde{G}-f)^2 \chi_n = 0$$

Donc: $f = \tilde{G}$

Donc: $f = f(0) + \int_0^\cdot g(t) dt$

Complément au développement représentatif du Théor. Riesz: preuve de $L^1(\mathbb{R})^* \simeq L^\infty(\mathbb{R})$.

Si on veut montrer ça il faut admettre par exemple la partie $\int_{\mathbb{R}} g \varphi = - \int_{\mathbb{R}} G \varphi'$, voire plus.

Soit $\Lambda: L^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ une forme linéaire continue.

Notons $E_n := [-n, n]$, de mesure finie $\mu(E_n) = 2n$.

Soit $f \in L^2(E_n)$:

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |f| \leq \int_{E_n} |f| \leq \|f\|_{L^2(E_n)} \|1\|_{L^2(E_n)} = \sqrt{2n} \|f\|_{L^2(E_n)}.$$

Ainsi, Λ peut être vue comme une forme linéaire continue sur $L^2(E_n)$.

Par le théorème de Riesz: $\exists! g_n \in L^2(E_n)$, $\forall f \in L^2(E_n)$: $\Lambda(f)_{E_n} = \int_{E_n} f g_n = \int_{\mathbb{R}} f g_n 1_{E_n}$.

On a alors $g_n 1_{E_n} \in L^1(E_n)$ et $\forall f \in L^2(E_n)$: $\Lambda(f)_{E_n} = \Lambda(f 1_{E_n})$.

$$= \int_{E_n} f 1_{E_n} g_n$$

$$= \int_{E_n} f g_n.$$

Par unicité de g_n : $g_n 1_{E_n} = g_n$ p.p.

Ainsi $g := \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$ est bien définie.

• Il y a $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $\|g\|_\infty \leq C := \|\Lambda\|$ (où $\|\Lambda\|$ est la norme de Λ comme f.l. $\mathbb{C}$ sur $L^1(\mathbb{R})$).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$. On pose $A := E_n \cap \{|g| > C + \varepsilon\}$ et $h := \arg(\tilde{g}) 1_A \in L^2(E_n) \cap L^1(\mathbb{R})$.

On a $h \in L^1(\mathbb{R})$ donc $\Lambda(h) \leq C \|h\|_1 = C \mu(A)$.

De plus, $h \in L^2(E_n)$ donc: $\Lambda(h) = \int_{E_n} h g$.

$$= \int_{\mathbb{R}} \arg(\tilde{g}) 1_A g$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |g| 1_A$$

$$\geq (C + \varepsilon) \mu(A)$$

Ainsi: $(C + \varepsilon) \mu(A) \leq C \mu(A)$, ce dont on déduit: $\mu(E_n \cap \{|g| > C + \varepsilon\}) = \mu(A) = 0$.

En faisant $n \rightarrow \infty$, on trouve: $\mu(\{|g| > C + \varepsilon\}) = 0$.

Ceci vaut pour $\varepsilon > 0$ quelconque donc $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $\|g\|_\infty \leq C$.

• En particulier, $\tilde{\Lambda}: f \mapsto \int_{\mathbb{R}} f g$ est une forme linéaire continue sur $L^1(\mathbb{R})$.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, on a $\text{supp } \varphi \subset E_n$ pour n assez grand, et $\varphi \in L^2(E_n)$.

Ainsi: $\Lambda(\varphi) = \int_{E_n} \varphi g = \int_{\mathbb{R}} \varphi g = \tilde{\Lambda}(\varphi)$. Par densité de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ dans $L^1(\mathbb{R})$: $\Lambda = \tilde{\Lambda}$.