<u>Références</u> :
Oraux XENS Algèbre 1, Serge Francinou

Théo. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n le nombre de partitions de $[\![1,n]\!]$ ($B_0 = 1$). On a alors*

$$B_n = \frac{1}{e}\sum_{k\geq 0}\frac{k^n}{k!}.$$

Démonstration. • Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k.$$

▶ $n = 1$: B_1 est le nombre de partitions de $[\![1,1]\!]$ ($\{1\}$) donc $B_1 = 1$. ▶ $n = 2$: B_2 est le nombre de partitions de $[\![1,2]\!]$ ($\{1\} \cup \{2\}$ ou $[\![1,2]\!]$) donc $B_2 = 2$. ▶ $n = 3$: B_3 est le nombre de partitions de $[\![1,1]\!]$ ($\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \in E_0, \{1,2\} \cup \{3\} \in E_0, \{1,3\} \cup \{2\} \in E_1$, $\{2,3\} \cup \{1\} \in E_1$ ou $[\![1,3]\!] \in E_2$) donc $B_3 = 5$

Pour $k \in [\![0,n]\!]$, considérons l'ensemble E_k des partitions de $[\![1,n+1]\!]$ pour lesquelles la partie de $[\![1,n+1]\!]$ contenant $n+1$ est de cardinal $k+1$.
On a $\text{Card}(E_k) = \binom{n}{k}B_{n-k}$. En effet, on choisit les k qui seront avec $n+1$. Il suffit ensuite de compter les partitions des $n-k$ éléments restants.
Comme $E_0, E_1, ..., E_n$ forment une partition de l'ensemble des partitions de $[\![1,n+1]\!]$, on obtient

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}B_k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k.$$

• Montrons que $\sum_{n\geq 0}\frac{B_n}{n!}x^n$ a un rayon de convergence non nul.
Montrons, par récurrence que $B_n \leq n!$.

Si $n = 0$, alors OK
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons le résultat vrai jusqu'au rang n.

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k \\ &\leq \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k! \\ &= n!\sum_{k=0}^{n}\underbrace{\frac{1}{(n-k)!}}_{\leq 1} \\ &\leq (n+1)! \end{aligned}$$

On a donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{B_n}{n!} \leq 1$ et le rayon de convergence R de la série entière est supérieur ou égal à 1.
Ainsi, sur $]-R,R[$, $\sum_{k\geq 0}\frac{B_n}{n!}x^n$ converge et on note $f(x)$ sa somme.

• Montrons que pour $x \in]-R,R[$, $f(x) = \frac{1}{e}e^{e^x}$.
Sur $]-R,R[$, f est dérivable et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{(n-1)!}x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_{n+1}}{n!}x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k\right)\frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{B_k}{n!}\right)x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{n}\frac{B_k}{k!(n-k)!}\right)x^n \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right) \\ &= e^x f(x) \end{aligned}$$

On obtient donc, pour tout $x \in]-R,R[$, $f'(x) - e^x f(x) = 0$. On en déduit, qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in]-R,R[$, $f(x) = Ce^{e^z}$. On sait que $f(0) = B_0 = 1$ et donc $C = \frac{1}{e}$. On a donc que pour tout $x \in]-R,R[$, $f(x) = \frac{1}{e}e^{e^z}$.

- Montrons que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B_k = \frac{1}{e}\sum_{n\geq 0}\frac{n^k}{n!}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} e^{e^x} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{nx}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Considérons la série double $(u_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ définie par $u_{n,k} = \frac{(nx)^k}{n!k!}$. On a, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{\infty}|u_{n,k}| = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|nz|^k}{n!k!} = \frac{e^{|nz|}}{n!},$$

puis

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^|nx|}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(e^|x|)^n}{n!} = e^{e^{|x|}}.$$

La série double est donc sommable, pour tout $x \in \mathbb{C}$. On peut donc échanger l'ordre des sommations et en déduire que, pour tout $x \in]-R,R[$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!n!}\right) \\ &= \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!n!}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^k}{n!}\right)\frac{x^k}{k!} \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière de f, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$B_k = \frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^k}{n!}.$$

□

Leçons possibles : 190 - 230 - 243