

* Calcul de l'intégrale de Gauss par une équation diff. [⚠] deons 220, 221, 234, 235, 236, 239 [Caldero: Analyse] (228)
 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ On ne peut pas montrer la cte sur $\mathbb{R}_+$ mais juste la cte en 0 par le TCD.

preuve:

Par parité de $x \mapsto e^{-x^2}$: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx}_{=: I}$

Soient $f: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ et $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, t) \mapsto \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2} \quad t \mapsto \int_0^{+\infty} f(x, t) dx$$

* clq h est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}_+$.

• $\forall t \geq 0$: $x \mapsto f(x, t)$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}_+$ (donc mesurable)

• $\forall x \geq 0$: $t \mapsto f(x, t)$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}_+$

• (domination) $\forall t, x \geq 0$: $0 \leq f(x, t) \leq \frac{1}{1+x^2}$ et $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ intégrable indep de t .

Par théorème de c-é sous le signe $\int$: $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+)$.

* clq h est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

• $\forall x \geq 0$: $t \mapsto f(x, t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\partial_t f(x, t) = -x^2 f(x, t)$

• $\forall t \geq 0$: $x \mapsto \partial_t f(x, t)$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}_+$ (donc mesurable)

• (domination) soit $a > 0$: $\forall t \geq a$, $\forall x \geq 0$: $|\partial_t f(x, t)| \leq \frac{x^2 e^{-ax^2}}{1+x^2}$ intégrable indep de t .

Par théorème de dérivabilité sous le signe $\int$: $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$ et $h'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{-x^2 e^{-tx^2}}{1+x^2} dx$

$$\text{Or: } \int_0^{+\infty} \frac{-x^2 e^{-tx^2}}{1+x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2} dx - \int_0^{+\infty} \frac{(1+x^2)e^{-tx^2}}{1+x^2} dx$$

$$= h(t) - \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} dx$$

De plus: $\int_0^{+\infty} e^{-tx^2} dx \stackrel{z=\sqrt{t}x}{=} \int_0^{+\infty} e^{-z^2} \frac{dz}{\sqrt{t}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}}$

Ainsi, h est solution de:

$$y' = y - \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}} \quad (*)$$

* Résolution de l'équation sur $\mathbb{R}_+^*$.

• solution homogène: $y_h(t) = \lambda e^t$ $\lambda \in \mathbb{R}$

• solution particulière, variation de la constante: $y(t) = \lambda(t) e^t$

$$y'(t) - y(t) = \lambda'(t) e^t + \lambda(t) e^t - \lambda(t) e^t = \lambda'(t) e^t$$

Ainsi: y solution $\Leftrightarrow \lambda'(t) e^t = -\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}} \Leftrightarrow \lambda'(t) = -\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}} e^{-t}$

Posons $\lambda: t \mapsto -\sqrt{\pi} \int_0^t \frac{e^{-s}}{\sqrt{s}} ds$ bien def et dérivable par le critère de Riemann

$\leadsto y(t) = \lambda(t) e^t$ est solⁿ sur $\mathbb{R}_+^*$ de (*).

$\leadsto \exists C \in \mathbb{R}$ tq $h(t) = \lambda(t)e^{-t} + Ce^t$

$\leadsto h(t)e^{-t} = \lambda(t) + C \quad (d)$

* $t \rightarrow 0$:

λ et h sont C^0 en 0 et $\lambda(0) = 0$, $h(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(+\infty) - \arctan(0) = \frac{\pi}{2}$

* $t \rightarrow +\infty$:

$\int_0^t \frac{e^{-s}}{\sqrt{s}} ds \stackrel{s=u^2}{=} \int_0^{\sqrt{t}} \frac{e^{-u^2}}{u} 2u du = 2 \int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2} du$

Donc: $\lambda(t) = -2I \int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2} du \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -2I^2$

$h(t)e^{-t} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t+x^2)}}{1+x^2} dx$

$\forall x \geq 0: \frac{e^{-(t+x^2)}}{1+x^2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$

$\forall t, x \geq 0: \frac{e^{-(t+x^2)}}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$ intégrable indép de t

Par TCD: $h(t)e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$

Donc: $0 = -2I^2 + C$

$\leadsto 2I^2 = \frac{\pi}{2} \leadsto I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (car $I \geq 0$ car $I = \int_0^{+\infty} \underbrace{e^{-x^2}}_{\geq 0} dx$)