

* Lemme de classe: degrés 157, 170, 171, 206, 214, 215, 218, (148)

[Bourbaki] I 5.66 et II 3.114

Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 avec $U \subseteq \mathbb{R}^n$ contenant 0.

Supposons que 0 est un point critique non dégénéré de f et $\text{sign}(D^2 f(0)) = (p, n-p)$.

Alors:

$\exists$ un difféomorphisme entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$ tq $\mathcal{U}(0) = 0$ et:

$$f(x) - f(0) = u^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2 \quad \text{où } u = \mathcal{U}(x)$$

démonstration:

Soit $A_0 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ inversible.

Notons $E := \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A_0 H \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})\}$ sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Alors:

$\exists$ un voisinage ouvert de A_0 dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $M: V \rightarrow \mathcal{G}_n(\mathbb{R})$ C^1 (Pisc.) tq:

$$\forall A \in V, A = {}^t M(A) A_0 M(A) \quad (\text{et } M(A_0) = I_n)$$

preuve du lemme:

Soit $\Psi: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ polynômiale en les coordonnées donc Pisc.
 $H \mapsto {}^t H A_0 H$

$$\begin{aligned} \text{On a } \Psi(I_n + H) &= {}^t (I_n + H) A_0 (I_n + H) \\ &= A_0 + {}^t H A_0 + A_0 H + \underbrace{{}^t H A_0 H}_{= o(H)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } D\Psi(I_n)H &= {}^t H A_0 + A_0 H \\ &= {}^t (A_0 H) + A_0 H \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi: } H \in \ker(D\Psi(I_n)) &\Leftrightarrow {}^t (A_0 H) + A_0 H = 0 \\ &\Leftrightarrow A_0 H \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow H \in A_0^{-1} \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Notons $F := \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A_0 H \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})\}$ sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On a $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = F \oplus \ker(D\Psi(I_n))$ (*) (car $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{H \mapsto A_0 H} \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un iso)

Notons $\Psi = \Psi|_F: F \rightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

Ψ est également Pisc et $D\Psi(I_n) = D\Psi(I_n)|_F$ est injective.

De plus, $F = A_0^{-1} \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ donc $\dim F = \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ donc $D\Psi(I_n)$ est un isomorphisme.
 de l' Théorème d'inversion locale permet alors de conclure en prenant M l'inverse local de Ψ autour de I_n .

preuve du lemme de Morse:

de FTRI à l'ordre 1 donne: (quite à restreindre U , on $U = B(0; \varepsilon)$)

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= \int_0^1 (1-t) D^2 f(tx) (x, x) dt \\ &= \int_0^1 t x (1-t) D^2 f(tx) x dt \quad \text{on voit } D^2 f(tx) \text{ comme un élément de } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \\ &= {}^t x Q(x) x \quad \text{avec } Q(x) := \int_0^1 (1-t) D^2 f(tx) dt \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

$Q: U \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ car f est $\mathcal{C}^3$ et $Q(0) = \int_0^1 (1-t) D^2 f(0) dt = \frac{1}{2} D^2 f(0)$.

Par hypothèse: $D^2 f(0)$ est inversible, donc, par le lemme

il y a un voisinage V de $\frac{1}{2} D^2 f(0)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $M: V \rightarrow GL(\mathbb{R})$ $\mathcal{C}^1$ tq:

$$\forall A \in V: A = {}^t M(A) Q(0) M(A)$$

Soit $W := Q^{-1}(V)$ voisinage ouvert de 0 dans U .

$$\begin{aligned} \text{Alors: } \forall x \in W: Q(x) &= {}^t M(Q(x)) Q(0) M(Q(x)) \\ &= {}^t H(x) Q(0) H(x) \quad (\text{avec } H(x) = M(Q(x)) \text{ pour alléger les notations}) \\ &\quad \text{avec } H: W \rightarrow GL(\mathbb{R}) \quad \mathcal{C}^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi: } f(x) - f(0) &= {}^t x {}^t H(x) Q(0) H(x) x \\ &= {}^t y Q(0) y \quad \text{avec } y = H(x)x \text{ qui dépend de manière } \mathcal{C}^1 \text{ de } x. \end{aligned}$$

$Q(0) = \frac{1}{2} D^2 f(0)$ est de signature $(p, n-p)$ donc, par le théorème d'inertie de Sylvester:

$$\exists A \in GL(\mathbb{R}), \quad Q(0) = {}^t A \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_{n-p} \end{pmatrix} A$$

Donc, en posant $u = Ay = AH(x)x$, on a:

$$f(x) - f(0) = {}^t u \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_{n-p} \end{pmatrix} u = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$$

On pose alors: $\varphi: W \rightarrow \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^1$ (et $\varphi(0) = 0$)
 $x \mapsto u = AH(x)x$

$$\text{On a } D\varphi(0)h = AH(0)h + H \otimes D^2 f(0) \cdot 0$$

$$= AH(0)h$$

$$= Ah \quad \text{car } H(0) = I_n \text{ par le lemme}$$

Ainsi $D\varphi(0) = A \in GL(\mathbb{R}^n)$ donc, par le théorème d'inversion locale, quite à restreindre

W : φ est un difféo de W sur $\varphi(W) = W' \subseteq \mathbb{R}^n$.

Ainsi: φ converge.