Références :
Probabilités pour les non-probabilistes, Walter Appel

On étudie la dynamique d'un modèle simple de population issue d'un seul individu. Le temps est discrétisé. A l'instant $n = 0$, le nombre total d'individus est donc $Z_0 = 1$. A chaque nouvel instant, chacun des individus donne naissance à un certain nombre de descendants et meurt. On suppose que la loi du nombre de descendants est la même pour chaque individu, et que ce nombre est indépendant de la descendance des autres individus.
On se donne une variable aléatoire X de loi discrète sur $\mathbb{N}$ telle que

$$\mathbb{P}(X = k) = p_k,$$

une suite double $(X_i^n)_{\substack{n\geq 0\\ i\geq 1}}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. On écrit que, à la génération n, il y a Z_n individus et chacun des individus, labellé par un indice i variant entre 1 et Z_n, va engendrer X_i^n descendants. On a donc

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_i^n.$$

On remarque que si $Z_n = 0$, alors on a nécessairement $Z_{n+1} = 0$. Notons $m = \mathbb{E}[X]$ et posons $G(t) = \mathbb{E}[t^X] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k$ la fonction génératrice de X. Notons $x_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$ la probabilité que la population soit éteinte à la génération n.
On remarque que l'évènement "M : la population finit par s'éteindre" est l'union croissante des évènements $\{Z_n = 0\}$ pour $n \geq 0$. On a donc (x_n) est croissante et majorée. Elle converge et on a :

$$\mathbb{P}(M) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}\{Z_n = 0\}\right) = \lim_{n\to+\infty} x_n = \alpha.$$

Lemme. La fonction génératrice G_n de Z_n vérifie la relation de récurrence

$$G_{n+1} = G \circ G_n.$$

Puisque $G_0 =$Id par construction, on en déduit que $G_1 = G$ et

$$G_n = G \circ G \circ ... \circ G.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
G_{n+1}(t) &= \mathbb{E}[t^{Z_{n+1}}] \\
&= \mathbb{E}\left[t^{\sum_{i=1}^{Z_n} X_i^n}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{N=0}^{\infty} t^{\sum_{i=1}^{N} X_i^n} \mathbb{1}_{Z_n=N}\right] \\
&\underset{\text{Fubini Tonelli}}{=} \sum_{N=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{N} t^{X_i^n} \mathbb{1}_{Z_n=N}\right] \\
&\underset{\text{indépendance}}{=} \sum_{N=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_n = N) \prod_{i=1}^{N} \underbrace{\mathbb{E}[t^{X_i^n}]}_{G(t)} \\
&= \sum_{N=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_n = N) G(t)^N \\
&= G_n \circ G(t)
\end{aligned}$$

□

Comme $x_n = \mathbb{P}(Z_n = 0) = G_n(0)$, on a

$$x_{n+1} = G_{n+1}(0) = G(G_n(0)) = G(x_n)$$

Or G est continue sur $[0, 1]$ et (x_n) est à valeurs dans [0,1]. Ainsi, α est un point fixe de G.

Lemme. α est le plus petit point fixe de G sur [0,1].

Démonstration. Soit β le plus petit point fixe de G sur [0,1] (existe car 1 est un point fixe de G sur [0,1]). Pour tout $x \in [0, 1]$,

$$G'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{k p_k x^{k-1}}_{\geq 0}$$

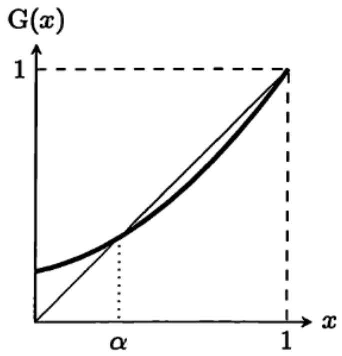
On a donc que G est croissante sur [0,1]. On peut donc avoir

$$G([0,\beta]) \underset{G \text{ croissante}}{\subset} [G(0), \underbrace{G(\beta)}_{\beta}] \subset [0,\beta]$$

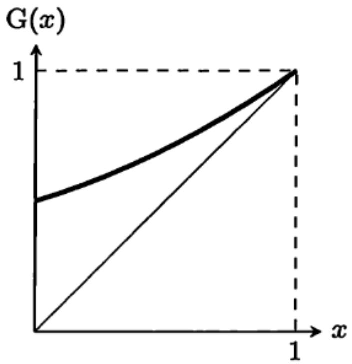
Comme $x_0 = 0 \in [0,\beta]$, on a que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [0,\beta]$. Par continuité, (x_n) converge vers un point de $[0,\beta]$. Ainsi, $\alpha = \beta$ d'où le résultat. $\square$

On sait d'ores et déjà que 1 est un point fixe de G. On veut maintenant savoir s'il existe ou non un point fixe strictement inférieur. On se retrouve confronté à trois cas.

(i) Si $m = G'(1) > 1$ alors on obtient



(ii) Si $m = G'(1) < 1$ alors on obtient



(iii) Si $m = G'(1) = 1$, on est confronté à deux cas

- Si $p_0+p_1 = 1$ (donne naissance à aucun ou à un enfant). Or $m = 1$ donc $p_1 = 1$. Ainsi, $Z_n = 1$ p.s donc $\mathbb{P}(M) = 0$.
- Si $p_0 + p_1 < 1$, alors il existe $k \geq 2$ tel que $p_k > 0$. Calculons maintenant, pour tout $x \in]0,1[$,

$$G''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k x^{k-2}.$$

Ainsi, G est strictement convexe sur]0,1[.
En particulier, sa courbe est strictement au-dessus de la droite $y = x$ sur]0,1[. Ainsi, $\mathbb{P}(M) = \alpha = 1$ et on a donc extinction p.s.

<u>Leçons possibles</u> : 226 - 229 - 253 - 260 - 264