La formule de Stirling

PHILIPPE François

June 1, 2017

1 Le développement.

Proposition 1. *On a* $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$.

Démonstration.
Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi de Poisson de paramètre 1. Posons: $S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $Z_n := \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathbb{V}(S_n)}}$. Notons que S_n suit une loi de Poisson de paramètre n et que $Z_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.

Étape 1: Appliquer le théorème central limite à la suite $(Z_n)_{n\geqslant 1}$.
$(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de va iid et pour tout n, $X_n \in L^2$. Les hypothèses du théorème central limite sont ainsi satisfaites avec de plus $\mathbb{E}(X_1) = \sqrt{\mathbb{V}(X_1)} = 1$. D'où, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(Z_n > t) = \mathbb{P}(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} > t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^{+\infty} \exp(\frac{-u^2}{2})\,\mathrm{d}u = \mathbb{P}(Z > t)$$

où Z suit une loi normale centrée réduite.

Étape 2: Appliquer le théorème de convergence dominée à la suite $(\mathbb{P}(Z_n > t))_{n\geqslant 1}$.
Soit $t > 0$. Comme $\{Z_n > t\} \subset \left\{Z_n^2 > t^2\right\}$, on a:

$$\mathbb{P}(Z_n > t) \leqslant \mathbb{P}(Z_n^2 > t^2) \underset{Markov}{\leqslant} \frac{\mathbb{E}(Z_n^2)}{t^2} = \frac{1}{t^2}.$$

On en déduit $\mathbb{P}(Z_n > t) \leqslant \mathbf{1}_{]0;1[} + \frac{1}{t^2}\mathbf{1}_{[1;+\infty[} \in L^1$. Le théorème de convergence dominée donne alors:

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n > t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z > t)\,\mathrm{d}t.$$

Étape 3: Calculer $\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z > t)\,\mathrm{d}t$
Allons y gaiement. On a:

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z > t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} (\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^{+\infty} \exp(\frac{-u^2}{2})\,\mathrm{d}u)\,\mathrm{d}t,$$

puis par Fubini-Tonneli:

$$\int_0^{+\infty}(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_t^{+\infty}\exp(\frac{-u^2}{2})\,\mathrm{d}u)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\int_0^{u}\exp(\frac{-u^2}{2})\,\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

<u>**Étape 4:**</u> **Calculer** $\int_0^{+\infty}\mathbb{P}(Z_n > t)\,\mathrm{d}t$

Allons y gaiement. On a:

$$\int_0^{+\infty}\mathbb{P}(Z_n > t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\mathbb{P}(S_n > \sqrt{n}t + n)\,\mathrm{d}t.$$

En vertu du théorème de transfert,

$$\int_0^{+\infty}\mathbb{P}(S_n > \sqrt{n}t + n)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(S_n = k)\mathbf{1}_{\{k>\sqrt{n}t+n\}}\,\mathrm{d}t$$

puis par Fubini-Tonneli, nous obtenons:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\mathbb{P}(S_n = k)\mathbf{1}_{\{k>\sqrt{n}t+n\}}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\int_0^{\frac{k-n}{\sqrt{n}}}\mathbb{P}(S_n = k)\,\mathrm{d}t.$$

Comme $\mathbb{P}(S_n = k) = \exp(-n)\frac{n^k}{k!}$, la transitivité de la relation $=$[1] donne:

$$\int_0^{+\infty}\mathbb{P}(Z_n > t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n+1}^{+\infty}(k-n)\exp(-n)\frac{n^k}{k!}.$$

Après simplification on obtient[2], on trouve:

$$\int_0^{+\infty}\mathbb{P}(Z_n > t)\,\mathrm{d}t = \frac{n^{n+1}}{\sqrt{n}\exp(n)n!}.$$

<u>**Conclusion.**</u>

D'après ce qui précède, on a:

$$\int_0^{+\infty}\mathbb{P}(Z_n > t)\,\mathrm{d}t = \frac{n^{n+1}}{\sqrt{n}\exp(n)n!}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} = \int_0^{+\infty}\mathbb{P}(Z > t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

D'où le résultat.

□

2 Quelques commentaires.

2.1 C'est pas marqué dans les livres.

Ce développement n'est pas référencé.

[1]Certains diront que j'abuse.
[2]Certains diront que j'abuse.

2.2 Exercices posés par le Jury.

- Soit X une variable aléatoire positive de loi $\mathbb{P}_X$. Montrer que:

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t)\,\mathrm{d}t.$$

- Calculer le volume de la sphère en dimension n.
- Appliquer la méthode de Laplace à la fonction Γ.