Références :
Eléments d'analyse fonctionnelle, Francis Hirsch, Gilles Lacombe

Soit (X, d) un compact non vide.
On note $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R} \text{ continue}\}$ muni de la norme $||.||_\infty$ définie par $||f||_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$ pour $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Rappel (Théorème de Dini)**.** Supposons que X est compact et $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$. On suppose que

(i) (f_n) est croissante ie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in X$, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$

(ii) (f_n) converge simplement vers f

Alors (f_n) converge uniformément vers f.

Lemme. On suppose que X contient au moins deux éléments. Soit H une partie de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ vérifiant les deux conditions suivantes

(i) Pour tout $u, v \in H$, $\sup(u, v) \in H$ et $\inf(u, v) \in H$.

(ii) Pour tout $(x_1, x_2) \in X$ tels que $x_1 \neq x_2$, pour tout $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, il existe $u \in H$ tel que $u(x_1) = \alpha_1$ et $u(x_2) = \alpha_2$.

Alors H est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Démonstration. Soit $f \in \mathbb{C}(X, \mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. On cherche à approcher f à ϵ près par un élément de H. Fixons $x \in X$. D'après l'hypothèse (ii), pour tout $y \neq x$, il existe $u_y \in H$ tel que $u_y(x) = f(x)$ et $u_y(y) = f(y)$. Soit

$$\mathcal{O}_y = \{x' \in X, u_y(x') > f(x') - \varepsilon\}$$

Pour tout $y \in X$, $\mathcal{O}_y$ est un ouvert qui contient x et y.
On a donc $X = \bigcup_{y \neq x} \mathcal{O}_y$ et par la propriété de Borel-Lebesgue, X peut être recouvert par un nombre fini de $\mathcal{O}_y$.
Ainsi, $X = \bigcup_{j=1}^{r} \mathcal{O}_{y_j}$, avec $y_j \neq x$ pour tout $j \in [\![1, r]\!]$.
Soit alors

$$v_x = \sup_{i \in [\![1,r]\!]} (u_{y_i}).$$

Par récurrence immédiate, on a $v_x \in H$. On sait aussi que $v_x(x) = f(x)$.
Pour tout $x' \in X$, il existe $j \in [\![1, r]\!]$ tel que $x' \in \mathcal{O}_{y_j}$. Ainsi, pour tout $x' \in X$, $v_x(x') \geq u_{y_j}(x') > f(x) - \varepsilon$.
Posons, pour tout $x \in X$,

$$\Omega_x = \{x' \in X, v_x(x') < f(x') + \varepsilon\}.$$

Ainsi, Ω_x est un ouvert de X qui contient x. On a donc $X = \bigcup_{x \in X} \Omega_x$.
Par la propriété de Borel-Lebesgue, X peut être recouvert par un nombre fini d'ensembles Ω_x.
On a donc $X = \bigcup_{i=1}^{p} \Omega_{x_i}$.
Posons $v = \inf_{i \in [\![1,p]\!]} (v_{x_i})$
Pour $x' \in X$, il existe $j \in [\![1, p]\!]$ tel que $x' \in \Omega_{x_j}$. Ainsi, on a $v(x') \leq v_{x_j}(x') < f(x') + \varepsilon$. On a aussi $v(x') > f(x') - \varepsilon$. Ainsi, $||f - v||_\infty < \varepsilon$. □

Déf. Une partie H de $\mathcal{C}(X)$ telle que pour tout $(x, y) \in X$ avec $x \neq y$, il existe $h \in H$ pour lequel $h(x) \neq h(y)$ est dite **séparante**.

Déf. Une partie H de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ est dite **réticulée** si pour tout couple $(f, g) \in H$, $\sup(f, g) \in H$ et $\inf(f, g) \in H$.

NB 1. Un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ est réticulée si et seulement si pour tout $h \in H$, $|h| \in H$.

Lemme. Si H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ réticulé, séparant et contenant les fonctions constantes, alors H est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Démonstration. Si X contient un seul élément, le résultat est clair. Supposons que X contient au moins deux éléments. Il nous suffit donc de vérifier le (ii) du lemme précédent.
Soit $(x_1, x_2) \in X$ tels que $x_1 \neq x_2$.
Comme H est séparante, il existe $h \in H$ tel que $h(x_1) \neq h(x_2)$.
Soit $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$. Alors le système d'équations

$$u_n = \begin{cases} \lambda h(x_1) + \mu = \alpha_1 \\ \lambda h(x_2) + \mu = \alpha_2 \end{cases}$$

est un système de Cramer (le déterminant de la matrice du sytème est non nul). Ainsi, il admet une unique solution $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Posons $f = \lambda h + \mu$. Comme H est un espace vectoriel, $f \in H$.On a aussi $f(x_1) = \alpha_1$ et $f(x_2) = \alpha_2$.
En admettant le lemme précédent, on obtient le résultat. □

Théo (Stone-Weierstrass réel)**.** *Toute sous-algèbre de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ séparante et contenant les fonctions constantes est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.*

Démonstration. Si H est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ séparante et contenant les fonctions constantes, alors il en est de même pour son adhérence $\overline{H}$.
Montrons donc que $\overline{H}$ est réticulée afin d'appliquer le lemme précédent.
Soit $f \in \overline{H}$ différent de la fonction nulle ($|0| = 0 \in H$).
On définit la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}[X]$ telle que

$$\begin{cases} P_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [-1, 1], P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - P_n^2(x))(*) \end{cases}$$

Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$0 \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq |x|.$$

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$,

- n=0 : Ok ($P_1(x) = \frac{1}{2}x^2 \leq |x|$).
- Hérédité.
  Par hypothèse de récurrence, $0 \leq P_{n+1}(x)$.
  On sait que $P_{n+2}(x) = P_{n+1}(x) + \frac{1}{2}(x^2 - (\underbrace{P_{n+1}(x)}_{\leq |x|})^2)$ d'où $P_{n+2}(x) \geq P_{n+1}(x)$ pour tout $x \in [-1, 1]$.
  Par un jeu de réécriture, on a

$$P_{n+2}(x) = |x| - (|x| - P_{n+1}(x))(1 - \frac{1}{2}(|x| + P_{n+1}(x))) \leq |x|.$$

On a donc bien le résultat. (P_n) est croissante et majorée donc elle converge vers f telle que, pour tout $x \in [-1, 1]$, $f(x) \leq |x|$ et en faisant $n \to \infty$ dans $(*)$, $f^2(x) \leq |x|$.
Ainsi, $f(x) = |x|$, pour tout $x \in [-1, 1]$.
D'après le théorème de Dini, on a même la convergence uniforme.
Ainsi, $\left(P_n\left(\frac{f}{||f||_\infty}\right)\right)_n$ converge uniformément vers $\frac{|f|}{||f||_\infty}$. Par conséquent, $\left(||f||_\infty P_n\left(\frac{f}{||f||_\infty}\right)\right)$ converge uniformément vers $|f|$. Comme $\overline{H}$ est une sous algèbre et contient les fonctions constantes, on a $\left(||f||_\infty P_n\left(\frac{f}{||f||_\infty}\right)\right) \in \overline{H}$. Ainsi, comme $\overline{H}$ est fermé, $|f| \in \overline{H}$.
Par conséquent, $\overline{H}$ est réticulée.
D'après le lemme qui précède, $\overline{H}$ est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. Ainsi, H est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. □

Leçons possibles : 202 - 203 - 209

Questions posées :

- ▶ Montrer le théorème de Dini.