

Th. Soit E un espace vectoriel sur K
muni d'un produit scalaire -
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal -

Alors

- * si $K = \mathbb{C}$, u est Df en B.O.N.
- * si $K = \mathbb{R}$, u n'est dans une B.O.N.

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & R_1 \end{pmatrix}$$

avec $I_n, R_1 \in \mathbb{R}$ et $\theta \in [0, \pi]$

$$R_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}$$

Lemme 1 Si F est stable par u ,
 $F^\perp$ est stable par u^* .

Preuve Soit $y \in F^\perp$, $x \in F$.

$$\text{Alors } \langle u^*(y), x \rangle = \langle y, u(x) \rangle = 0$$

$\in \tilde{F}^\perp \subset F^\perp$ $\square$

Lemme 2 Soit u normal. Si $E_1(u)$
est un sep de u , alors
 $E_1(u)^\perp$ est stable par u .

(Preuve D'après le lemme 1, car $E_1(u)$
est u^* -stable, car u, u^* commutent.) $\square$

Lemme 3 $\dim(E) = 2$ - Si u est
normal et sans vp réelle,
alors $\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$ dans
toute B.O.N.

Preuve -

$$P = \text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$${}^t P P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

$$= {}^t P P = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ab + cd \\ ab + cd & c^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } c^2 = b^2, \text{ i.e. } c = -b,$$

Car si $c = b$, P est symétrique donc
a une vp réelle.

Alors $(a-d)b \neq 0$ d'où comme $b \neq 0$,
 $a = d$. $\square$

Démonstration

Par récurrence sur la dimension n .

Cas $K = \mathbb{C}$. Soit λ une valeur
propre de u . Alors

$$E_1(u)^\perp \text{ est stable par } u^* \quad (L1)$$

$$E_1(u)^\perp \text{ est stable par } u \quad (L2)$$

et de dim $< n$. On prend une
base de Df sur $E_1(u)^\perp$ complétée
adaptée à $E_1(u)$, on a le résultat.

Cas $K = \mathbb{R}$.

On cas u a une vp réelle.

Même raisonnement que
a. dim n .

2^e cas u n'a pas de vp réelle.

Alors N_{u^*} n'a pas de vp réelle
non nulle.

Pour $N = 1$
et $N \neq 10$: on a

* N est stable

Pour $u =$
 $u^* =$

2^e cas u n'a pas de valeur propre réelle -

Alors χ_u a que des facteurs irréductibles de second degré; soit $X^2 - 2\alpha X + \beta = Q$ un tel facteur -

Ponons $N = \ker(Q(u))$.

(L1) $N \neq \{0\}$: en effet, si $Q = (X - I)(X - I)$,

$$\det(Q(u)) = \underbrace{\det(u - \text{Id})}_{=0} \det(u - \text{Id}) = 0.$$

N est stable par u car $Q(u)$, u commutant u^t par le L2, le ker étant inv. inv.

Ponons $v = u|_N$ - Alors $v^* = u^*|_N$

L'endo v^*v est symétrique, donc admet une vp réelle μ - Soit n un $\mathbb{R}^p$ associé $\Rightarrow \mu$ pour v et v^* .

Ponons $F = (n, u(n))$ -

Alors

* $\dim(F) = 2$,
car u n'a pas de vp réelle.

* F est stable par u ,

car : $u(n) \in F$

* $\forall x \in N$, donc $u^2(x) - 2\alpha u(x) + \beta x = 0$
d'où $u^2(x) = 2\alpha u(x) + \beta x$.

* F est stable par u^* ,

car $\beta \neq 0$, donc $F = \text{Vect}(u(n), u^2(n))$

Alors :

$$u^*u(n) = v^*v(n) = \mu n \in F$$

$$u^*u^2(n) = u(u^*u(n)) = u(\mu n) = \mu u(n) \in F$$

les autres $v|_F$ et $v^*|_F$ sont triviaux

Enfin $F, F^\perp$ sont stables

par u, u^* .

Par récurrence, on peut conclure.