

Prop Soit $n \in \mathbb{N}$. Preuve $\sum_{m=0}^n u(m)$

Notons C_n le nombre de cycles de S_n dans un DPCSD.

Alors $\mathbb{E}(C_n) = H_n$.

Objectif: Calculer la loi de C_n et sa série génératrice.

Notons $m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x^0 = x \\ x^{n+1} = x^n(x+n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

de sorte que $x^n = (x+n-1) \dots (x+1)x$

$$x^n = \sum_{k=0}^n c(n,k) x^k$$

définir Relation de récurrence sur les $c(n,k)$.

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= x^n(x+n) = (x+n) \sum_{k=0}^n c(n,k) x^k \\ &= \sum_{k=0}^n c(n+1,k) x^k = \sum_{k=0}^n c(n,k) x^{k+1} + \sum_{k=0}^n n c(n,k) x^k \end{aligned}$$

$$\begin{cases} c(n+1,k) = c(n,k-1) + n c(n,k) \\ c(n+1,n+1) = c(n,n) = c(0,0) = 1 \\ c(n+1,0) = 0 \end{cases}$$

But: Montrer que $\forall k \in [0, n]$

$$P(C_n = k) = \frac{c(n,k)}{n!}$$

Notons G_n les permutations de C_n à n cycles dans leur DPCSD.

$$\Delta \text{ id} \in G_{n,n}$$

Montrons que $|G_{n,k}| = c(n,k)$.

$\hookrightarrow \dots$ vérifie la même relation de récurrence.

Initialisation: OK.

$$\text{On note } G_{n,k}^m = \{ \sigma \in G_{n,k} \mid \sigma(n+1) = m \}$$

$$\text{alors } G_{n,k} = \bigcup_{m=1}^{n+1} G_{n,k}^m$$

Cor 1 $m = n+1$

Alors $\sigma(n+1) = n+1$,

$$\text{donc } \sigma|_{[1,n]} \in G_{n,k-1}$$

$$\text{Alors } G_{n,k-1}^m \cong G_{n,k-1}$$

$$\text{donc } |G_{n+1,k}| = |G_{n,k-1}|$$

Cor 2 $m \in [1, n]$.

Montrons d'abord $G_{n+1,k}^m \cong G_{n,k}$

Soit $\sigma \in G_{n+1,k}^m$,

$$\sigma = (m+1 \ m \ j_1 \dots j_n) \sigma' \quad \text{ch}$$

Pour $\tau = (m+1 \ m)$, on a:

$$\tau \sigma = \tau \sigma' = (m \ j_1 \dots j_n) \sigma' \quad \text{ch} \in G_{n,k}$$

Donc $f: G_{n+1,k}^m \rightarrow G_{n,k}$

$$\sigma \mapsto \tau \sigma = \tilde{\sigma}$$

Alors: bijective et conservatrice

$\hookrightarrow$ est bien définie,

par transitivité de la DPCSD.

Il est surjectif, par récurrence sur n en remontant le premier pic d'abord,

$\hookrightarrow$ est surjective. Supposons

$$f(\sigma) = f(\sigma')$$

$$\begin{cases} \sigma = (m+1 \ m \ j_1 \dots j_n) \sigma' \quad \text{ch} \\ \sigma' = (m+1 \ m \ j'_1 \dots j'_n) \sigma'' \quad \text{ch} \end{cases}$$

Alors $(m \ j_1 \dots j_n) \sigma' = (m \ j'_1 \dots j'_n) \sigma''$

donc $(m \ j_1 \dots j_n) = (m \ j'_1 \dots j'_n)$

$$\text{pour } \sigma' \cdot \text{ch} = \sigma'' \cdot \text{ch}$$

donc $\sigma = \sigma'$.

$$\text{donc, } |G_{n+1,k}| = \sum_{m=1}^{n+1} |G_{n+1,k}^m| = |G_{n,k-1}| + n |G_{n,k}|$$

$$\text{Par suite: } G_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{P(C_n=k)}{n!} t^k = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n c(n,k) t^k$$

$$G_n(t) = \frac{t^n}{n!}$$

$$\text{On a: } G_n(1) = 1 \\ G_n'(1) = \mathbb{E}(C_n), \text{ donc}$$

$$\mathbb{E}(C_n) = \frac{G_n'(1)}{G_n(1)} = \frac{d}{dt} \ln G_n(t) \Big|_{t=1}$$

$$\ln \left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \right) = -\ln n!$$

$$\mathbb{E}(C_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = H_n$$

Prop Soit $m \in \mathbb{N}$. Prenons $\sum_m' \text{ sur } \mathcal{U}(G_m)$

Notons C_m le nombre de cycles de Σ_m dans sa DPSCD.

Alors $\mathbb{H}(m) = \frac{1}{m!}$.

Objectif Calculer la loi de C_m et sa série génératrice.

Notations $m \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x^{\bar{0}} = x \\ x^{\overline{m+1}} = x^{\bar{m}}(x+m) \end{cases} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

de sorte que $x^{\bar{m}} = (x+m-1) \dots (x+1)x$

On a :

$$x^{\bar{m}} = \sum_{k=0}^m c(m,k) x^k$$

lemme Relation de récurrence sur les $c(m,k)$.

$$\begin{aligned} x^{\overline{m+1}} &= x^{\bar{m}}(x+m) = (x+m) \sum_{h=0}^m c(m,h) x^h \\ &= \sum_{h=0}^{m+1} c(m+1,h) x^h = \sum_{h=0}^m c(m,h) x^{h+1} + \sum_{h=0}^m m c(m,h) x^h \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } \begin{cases} c(m+1,h) = c(m,h-1) + m c(m,h) \\ c(m+1,m+1) = c(m,m) = c(0,0) = 1 \\ c(m+1,0) = 0 \end{cases} \quad \forall h \in \overline{1,m}$$

But Montrer que $\forall k \in \overline{0,m}$

$$\mathbb{P}(C_m = k) = \frac{c(m,k)}{m!}$$

Notons G_m les permutations de G_m à m cycles dans leur DPSCD.

$$\triangleq \text{id} \in G_{m,m}$$

Montrons que $|G_{m,h}| = c(m,h)$.

↳ ... vérifiant la même relation de récurrence.

Initialisation OK.

$$\text{On note } G_{m+1,h}^m = \{ \sigma \in G_{m+1,h} \mid \sigma(m+1) = m \}$$

$$\text{alors } G_{m+1,h} = \bigcup_{m=1}^{m+1} G_{m+1,h}^m$$

Cas 1 $m = m+1$

Alors $\sigma(m+1) = m+1$,

$$\text{donc } \sigma|_{\overline{1,m}} \in G_{m,h-1}$$

$$\text{Alors } G_{m+1,h}^m \cong G_{m,h-1}$$

$$\text{d'où } |G_{m+1,h}^m| = |G_{m,h-1}|$$

Cas 2 $m \in \overline{1,m}$

Montrons donc $|G_{m+1,h}|$

$$\text{Soit } \sigma \in G_{m+1,h}$$

$$\sigma = (m+1 \dots m \dots)$$

$$\text{Pour } \tau = (m+1 \dots m) \dots$$

$$\tau \sigma = (m \dots)$$

$$\text{Donc } f: G_{m+1,h}^m \rightarrow G_{m,h-1}$$

Alors

f est bien défini

permutation de la

Cas 2 $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$.

Montrons d'abord : $\mathcal{G}_{m+1, h}^m \simeq \mathcal{G}_{m, h}$

Soit $\sigma \in \mathcal{G}_{m+1, h}^m$,

$$\sigma = (m+1 \ m \ i_3 \dots i_n) c_2 \dots c_h$$

Pour $\tau = (m+1 \ m)$, on a :

$$\tilde{\sigma} = \tau \sigma = (m \ i_3 \dots i_n) c_2 \dots c_h \in \mathcal{G}_{m, h}$$

Donc $f: \mathcal{G}_{m+1, h}^m \rightarrow \mathcal{G}_{m, h}$

$$\sigma \mapsto \tau \sigma = \tilde{\sigma}$$

Alors :
bijections et surjection

f est bien définie,

par suite de la DPCC.

f est surjective, par existence de la DPCC
en remontant le processus précédent,

f est injective. Supposons
 $f(\sigma) = f(\sigma')$.

$$\begin{cases} \sigma = (m+1 \ m \ i_3 \dots i_n) c_2 \dots c_h \\ \sigma' = (m+1 \ m \ j_3 \dots j_n) c'_2 \dots c'_h \end{cases}$$

Alors $(m \ i_3 \dots i_n) c_2 \dots c_h = (m \ j_3 \dots j_n) c'_2 \dots c'_h$,
d'où $(m \ i_3 \dots i_n) = (m \ j_3 \dots j_n)$

puisque $c_2 \dots c_h = c'_2 \dots c'_h$,
d'où $\sigma = \sigma'$.

$$\begin{aligned} \text{Alors, } |\mathcal{G}_{m+1, h}^m| &= \sum_{n=1}^{m+1} |\mathcal{G}_{m+1, h}^n| \\ &= |\mathcal{G}_{m+1, h}^{m+1}| + m |\mathcal{G}_{m, h}^m| \end{aligned}$$

Par suite : $G_m(t) = \sum_{h=0}^m \frac{P(C_m=h)}{m!} t^h$

$$= \frac{1}{m!} \sum_{h=0}^m c(m, h) t^h$$

$$G_m(t) = \frac{t^m}{m!}$$

on a : $G_m(1) = 1$

$$G_m'(1) = \mathbb{E}(C_m), \text{ d'où :}$$

$$\mathbb{E}(C_m) = \frac{G_m'(1)}{G_m(1)} = \left. \frac{d}{dt} \ln G_m(t) \right|_{t=1}$$

$$\ln \left(\prod_{h=0}^{m-1} (t+h) \right) = \ln m!$$

$$\begin{aligned} \text{d'où :} \quad \mathbb{E}(C_m) &= \sum_{h=0}^{m-1} \frac{1}{h+1} = H_m \\ &= \sum_{h=0}^{m-1} \ln(t+h) \end{aligned}$$