Références :
Oraux X-ENS Analyse 2, Serge Francinou

Déf. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de $[0,1]$ et $a,b\in[0,1]$ avec $a\leq b$. La suite (u_n) est *équirépartie* si et seulement si, pour tout a,b, on a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Card\{k\in\{1,...,n\},u_k\in[a,b]\}}{n}=b-a.$$

Théo. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de [0,1] et $a,b\in[0,1]$ avec $a\leq b$. Alors on a équivalence entre les propriétés suivantes :*

(i) (u_n) est équirépartie.

(ii) Pour toute fonction $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ continue, on a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(u_k)=\int_0^1 f(t)dt$$

(iii) Pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{2i\pi pu_k}=0$$

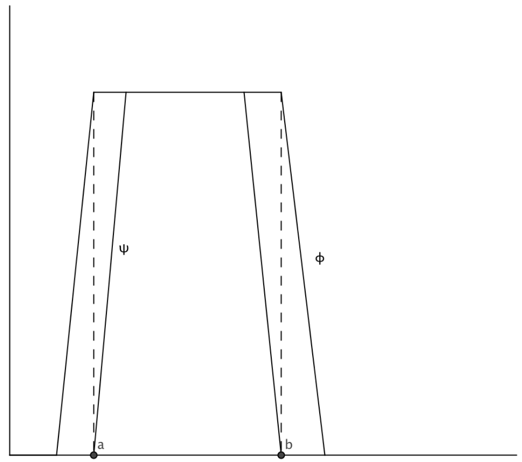
Démonstration. Dans toute la démonstration, nous noterons $X_n(a,b)=Card\{k\in\{1,...,n\},u_k\in[a,b]\}$.

(i)⇒(ii) Notons que la quantité $\frac{X_n(a,b)}{n}$ est égale à $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\chi_{[a,b]}(u_k)$ où $\chi_{[a,b]}$ désigne la fonction caractéristique du segment $[a,b]$ et que $\int_a^b\chi_{[a,b]}=b-a$. La propriété (ii) est donc vérifiée pour les fonctions caractéristiques d'un segment. De plus, on sait que toute fonction en escalier est combinaison linéaire de fonctions caractéristiques de segments (qui peuvent être réduits à un point pour atteindre les valeurs de discontinuité de f). On a donc que la propriété (ii) est vérifiée pour toutes les fonctions en escalier.
Soit maintenant $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue et soit $\varepsilon>0$. On sait qu'il existe une fonction en escalier g qui approche uniformément la fonction f à ε près sur [0,1] c'est-à- dire $\|f-g\|_\infty\leq\varepsilon$. En utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(u_k)-\int_0^1 f\right| &\leq \underbrace{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(f(u_k)-g(u_k))\right|}_{\leq\varepsilon\text{ par convergence uniforme}}\\ &+\underbrace{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}g(u_k)-\int_0^1 g\right|}_{\leq\varepsilon\text{ car } g \text{ est en escalier}}\\ &+\underbrace{\left|\int_0^1 g-\int_0^1 f\right|}_{\leq\varepsilon\text{ par convergence uniforme}}\end{aligned}$$

d'où le résultat.

(ii)⇒(i) Soit $a,b\in[0,1]$ avec $a<b$. On considère les suites de fonctions continues ϕ_k et ψ_k définies pour k suffisamment grand par les figures suivantes :



On observe pour tout p assez grand que $\psi_p\leq\chi_{[a,b]}\leq\phi_p$. Ainsi, pour tout $n\geq1$, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\psi_p(u_k)\leq\frac{X_n(a,b)}{n}\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\phi_p(u_k)$. Par hypothèse,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \psi_p(u_k) = \int_0^1 \psi_p = b - a - \frac{1}{p}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \phi_p(u_k) = \int_0^1 \phi_p = b - a + \frac{1}{p}$$

d'où le résultat.

(ii)$\Rightarrow$(iii) On applique le (ii) aux fonctions $x \longmapsto \cos(2\pi px)$ et $x \longmapsto \sin(2\pi px)$.

(iii)$\Rightarrow$(ii) Par linéarité, on a la propriété (ii) pour tout polynôme trigonométrique du type

$$x \longmapsto a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(2k\pi x) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(2k\pi x).$$

D'après le théorème de Weierstrass trigonométrique, toute fonction continue $f : [0,1] \longmapsto \mathbb{R}$ avec $f(0) = f(1)$ est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques de ce type.

□

Ex. Soit $\theta > 0$. La suite $(\{n\theta\})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie si et seulement si $\theta \notin \mathbb{Q}$.

Démonstration.

- Supposons $\theta \notin \mathbb{Q}$. Pour prouver que la suite $(n\theta)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie, on va utiliser le critère de Weyl. On a, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi p\{k\theta\}} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi pk\theta} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(e^{2i\pi p\theta})^k \\ &= \frac{e^{2i\pi p\theta}}{n}.\frac{e^{2in\pi p\theta}-1}{e^{2i\pi p\theta}-1}.\end{aligned}$$

  Ce calcul est possible car, comme $\theta \notin \mathbb{Q}$, $e^{2i\pi p\theta} \neq 1$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Comme $\mid e^{2in\pi p\theta} \mid = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la suite $(\frac{e^{2in\pi p\theta}-1}{e^{2i\pi p\theta}-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée et $(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi p\{k\theta\}})_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0 quand $n \to \infty$. Ainsi, la suite $(\{n\theta\})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie.

- Supposons que $\theta = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. On a

$$\{(n+q)\theta\} = \{n\theta + p\} = \{n\theta\}.$$

  Ainsi, la suite $(\{n\theta\})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est périodique de période q et n'est donc pas équirépartie.

□

Leçons possibles : 202 - 223