<u>Références</u> :
*Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*, François Rouvière

On note $B$ la boule unité fermée et $S$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ pour $n = 1$ ou 2.

**Théo** (du point de Brouwer)**.** *Toute application continue de $B$ dans $B$ admet au moins un point fixe.*

*Démonstration.*

- Pour $n = 1$.
  Soit $F : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ une fonction continue.
  On sait que $F(a) \geq a$ et $F(b) \leq b$. Ainsi,d'après le théorème des valeurs intermédiaires,, $\phi(x) = f(x) - x$, qui vérifie $\phi(a) \geq 0$ et $\phi(b) \leq 0$, s'annule en au moins un point sur $[a, b]$.
- Supposons l'énoncé faux.
  - ▶ Montrons qu'il existe une rétraction de la boule sur la sphère, ie une application continue $G : B \to S$ dont la restriction à $S$ serait l'identité. On suppose que $F(x) \neq x$ pour tout $x \in B$.
    L'intersection $G(x)$ de la sphère unité avec la demi-droite issue de $F(x)$ passant par $x$ s'obtient en résolvant le système d'équations

$$\begin{cases} G(x) - F(x) = \lambda(x - F(x)) \\ ||G(x)||^2 = 1 \end{cases}$$

avec $\lambda > 0$ (pour avoir le bon sens des vecteurs). $\lambda$ est une fonction de $x$. On a donc

$$\underbrace{||\lambda(x - F(x)) + F(x)||^2 - 1}_{P_x(\lambda)} = 0.$$

En développant, on obtient

$$P_x(\lambda) = \lambda^2||x - F(x)||^2 + 2\lambda(x - F(x)).F(x) + ||F(x)||^2 - 1.$$

Comme $P_x(0) = ||F(x)||^2 - 1 \leq 0$ et

$$\begin{aligned} P_x(1) &= ||x - F(x)||^2 + 2(x - F(x)).F(x) + ||F(x)||^2 - 1 \\ &= ||x||^2 - 2xF(x) + 2xF(x) - ||F(x)||^2 + ||F(x)||^2 - 1 \\ &= ||x||^2 - 1 \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

De plus, $\lim\limits_{|\lambda| \to +\infty} P_x(\lambda) = +\infty$.
Ainsi, cette équation du second degré admet une racine dans $]-\infty, 1]$ et une autre racine dans $[0, +\infty]$. Le discriminant

$$\Delta(x) = 4(x - F(x)).F(x))^2 - 4||x - F(x)||^2(||F(x)||^2 - 1)$$

est strictement positif puisque $P_x$ a deux racines distinctes.
La racine positive est

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= \frac{-2(x - F(x)).F(x) + \sqrt{\Delta(x)}}{2||x - F(x)||^2} \\ &= \frac{-(x - F(x)).F(x) + \sqrt{\Delta'(x)}}{||x - F(x)||^2} \text{ avec } \Delta'(x) = \frac{\Delta(x)}{4}. \end{aligned}$$

Ainsi, $x \mapsto \lambda(x)$ est continue donc $x \mapsto G(x)$ est continue.
De plus, si $x \in S$, alors $P_x(1) = 0$ donc $\lambda(x) = 1$ et $G(x) = x$.
Ainsi, $G$ est un rétraction de la boule sur la sphère.

  - ▶ Pour $s, t \in [0, 1]$, on note

$$\gamma_s(t) = G(s\cos(2\pi t), s\sin(2\pi t)).$$

L'application $(s, t) \mapsto \gamma_s(t)$ est continue sur $[0, 1] \times [0, 1]$ à valeurs dans la sphère unité et déforme continument $\gamma_0$ en $\gamma_1$ sans rencontrer l'origine (puisqu'à valeurs dans $S$).
Ainsi, leurs indices par rapport à l'origine sont égaux.

Or $\gamma_0$ est le lacet réduit à $G(0)$ et $\gamma_1(t)$ est la sphère unité. En effet,

$$\gamma_1(t) = G(\underbrace{\cos(2\pi t)\sin(2\pi t)}_{\in S}) = (\cos(2\pi t)\sin(2\pi t))$$

Ainsi, $\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(0) = 1$ et $\mathrm{Ind}_{\gamma_0}(0) = 0$ ce qui est absurde d'où le résultat.

$\square$

<u>Leçons possibles</u> : 204