

218
223
224
226
228

19', 22"
15' 05"

Dumas, modélisation
p. 19-20
Louvain
p. 152

Méthode de Newton

Théorème: Soit $f \in C^2([a, b])$ et $\bar{x} \in [a, b]$ tel que $f(\bar{x}) = 0$ et $f'(\bar{x}) \neq 0$. Alors, $\exists U \subset [a, b]$ voisinage de $\bar{x}$ tel que $\forall x_0 \in U$, la suite (x_n) donnée par $x_{n+1} = F(x_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ où $F: x \in [a, b] \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, est bien définie et converge au moins à l'ordre 2 vers $\bar{x}$.
De plus, si $f'(\bar{x}) = 0$ et $f''(\bar{x}) \neq 0$, alors (x_n) converge géométriquement vers $\bar{x}$ dans U .

① (x_n) bien définie sur U ② (x_n) converge à l'ordre 2 ③ Si $f'(\bar{x}) = 0$

① Puisque f est C^2 , $\exists \eta > 0$ tel que $f' \neq 0$ sur $\bar{B}(\bar{x}, \eta)$, et par le théorème des bornes atteintes, $C := \frac{\max_{x \in \bar{B}(\bar{x}, \eta)} |f''|}{\min_{x \in \bar{B}(\bar{x}, \eta)} |f'|} > 0$ bien défini. On pose $\delta = \min(\eta, \frac{1}{2})$ et $U = B(\bar{x}, \delta)$. Alors F bien définie sur U . Par Taylor Lagrange, $\forall x \in U \exists z \in]x, \bar{x}[$ $f(\bar{x}) = f(x) + (\bar{x} - x)f'(x) + \frac{(\bar{x} - x)^2}{2}f''(z)$, donc $F(x) - \bar{x} = x - \bar{x} - \frac{f(x) - f(\bar{x})}{f'(x)} = \frac{f(\bar{x}) - f(x) + (\bar{x} - x)f'(x)}{f'(x)} = \frac{f''(z)}{2f'(x)}(\bar{x} - x)^2$. On en déduit $|F(x) - \bar{x}| \leq \frac{C}{2}(\bar{x} - x)^2 \leq \frac{C}{2}\delta^2 \leq \frac{\delta}{2} \leq \delta$. Donc F laisse stable U , et $\forall x \in U$, (x_n) bien définie.

② De plus, $\forall n \in \mathbb{N} |x_{n+1} - \bar{x}| \leq \frac{C}{2} |x_n - \bar{x}|^2 \leq \frac{1}{2} |x_n - \bar{x}|$. Par récurrence, $|x_n - \bar{x}| \leq \frac{1}{2^n} |x_0 - \bar{x}| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
Si (x_n) ne stationne pas, par Taylor Lagrange, $\forall n \in \mathbb{N} \exists z_n \in]x_n, \bar{x}[$ tel que $x_{n+1} - \bar{x} = \frac{f''(z_n)}{2f'(x_n)}(x_n - \bar{x})^2$, donc $\frac{x_{n+1} - \bar{x}}{(x_n - \bar{x})^2} = \frac{f''(z_n)}{2f'(x_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{f''(\bar{x})}{2f'(\bar{x})}$ car $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{x}$ et f est C^2 .

③ Si $f'(\bar{x}) \neq 0$, on a $x_{n+1} - \bar{x} \sim \frac{f''(\bar{x})}{2f'(\bar{x})}(x_n - \bar{x})^2$ et la convergence d'ordre 2.

④ Sinon, on a $x_{n+1} - \bar{x} = o((x_n - \bar{x})^2)$ et la convergence est plus rapide.

③ Si $f'(\bar{x}) = 0$ mais $f''(\bar{x}) \neq 0$, $\exists \eta > 0$ tel que $f' \neq 0$ sur $B(\bar{x}, \eta)^{\text{H&S}}$. De plus, F se prolonge en $\bar{x}$ de manière C^1 . On a par Taylor-Young, autour de $\bar{x}$:

$$f(x) = \frac{(x - \bar{x})^2}{2} f''(\bar{x}) + o((x - \bar{x})^2), \quad f'(x) = (x - \bar{x}) f''(\bar{x}) + o(x - \bar{x}) \quad \text{Donc}$$

$$F(x) - \bar{x} = x - \bar{x} - \frac{(x - \bar{x})^2 \frac{f''(\bar{x})}{2} + o((x - \bar{x})^2)}{(x - \bar{x}) f''(\bar{x}) + o(x - \bar{x})} = \frac{(x - \bar{x})^2 \frac{f''(\bar{x})}{2} + o((x - \bar{x})^2)}{(x - \bar{x}) f''(\bar{x}) + o(x - \bar{x})} = \frac{x - \bar{x}}{2} + o(x - \bar{x}) \xrightarrow{x \rightarrow \bar{x}} 0$$

Alors on prolonge continuellement F en $\bar{x}$ avec $F(\bar{x}) = \bar{x}$, de la même façon on prolonge

F' en $\bar{x}$ avec $F'(\bar{x}) = \frac{1}{2}$. Donc $\exists U' \subset [a, b]$ voisinage de $\bar{x}$ et $k \in]0, 1[$ tel que $|F'| \leq k$

sur U' . Puisque $F(\bar{x}) = \bar{x}$, par le théorème des accroissements finis U' est stable par F et

$\forall n \in \mathbb{N} |x_{n+1} - \bar{x}| \leq k |x_n - \bar{x}|$. Donc $|x_n - \bar{x}| \leq k^n |x_0 - \bar{x}| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, et (x_n) converge géométriquement.

Lemme: Si $f(\bar{x}) \neq 0$ et f est C^1 , alors $\exists \eta > 0$ tel que $f \neq 0$ sur $B(\bar{x}, \eta)$

En $\varepsilon = |f'(\bar{x})| > 0$, $\exists \eta > 0$, $\forall x \in B(\bar{x}, \eta)$ $|f'(x) - f'(\bar{x})| < |f'(\bar{x})|$. Donc

$f'(x) - |f'(\bar{x})| < f'(x) < f'(\bar{x}) + |f'(\bar{x})|$. Si $f'(\bar{x}) > 0$, $0 < f'(x)$. Si $f'(\bar{x}) < 0$, $f'(x) < 0$.

Lemme: Si $f'(\bar{x}) = 0$, $f''(\bar{x}) \neq 0$ et f est C^2 , alors $\exists \eta > 0$ tel que $f \neq 0$ sur $B(\bar{x}, \eta) \setminus \{\bar{x}\}$

On a $\frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = \frac{f(x)}{x - \bar{x}} \xrightarrow{x \rightarrow \bar{x}} f''(\bar{x}) \neq 0$. Donc en $\varepsilon = |f''(\bar{x})| > 0$, $\exists \eta > 0$, $\forall x \in B(\bar{x}, \eta) \setminus \{\bar{x}\}$

$|\frac{f(x)}{x - \bar{x}} - f''(\bar{x})| < |f''(\bar{x})|$. D'où $\frac{f(x)}{x - \bar{x}} \neq 0$, $\forall x \in B(\bar{x}, \eta) \setminus \{\bar{x}\}$, et $f(x) \neq 0$ aussi.

Lemme: Si $|F'(\bar{x})| < 1$, alors $\exists U$ voisinage de $\bar{x}$ tel que $F(U) \subset U$, $|F'|_{\eta} \leq k < 1$.

Soit $k = \frac{1 + |F'(\bar{x})|}{2} \in]0, 1[$. On a $|F'(\bar{x})| = \frac{1}{2}(|F'(\bar{x}) + F'(\bar{x})|) < k$, donc $\varepsilon := k - |F'(\bar{x})| > 0$

Donc $\exists \delta > 0$, $\forall x \in B(\bar{x}, \delta)$ $|F'(x) - F'(\bar{x})| < \varepsilon$. Dans $U := B(\bar{x}, \delta)$, on a

$|F'(x)| \leq |F'(\bar{x})| + |F'(x) - F'(\bar{x})| < |F'(\bar{x})| + \varepsilon = k < 1$. Puisque F est C^1 sur U ,

par TAF on a $\forall x, y \in U$, $\exists \xi \in]x, y[$ tel que $|F(x) - F(y)| = |F'(\xi)| |x - y| \leq k |x - y|$.

De plus, $F(\bar{x}) = \bar{x}$ donc $|F(x) - \bar{x}| \leq k |x - \bar{x}| \leq k \delta < \delta$, d'où $F(U) \subset U$.

Lemme: F se prolonge en $\bar{x}$ de façon C^1 par $F'(\bar{x}) = \frac{1}{2}$

On a $\forall x \in B(\bar{x}, \eta) \setminus \{\bar{x}\}$, $F(x) = 1 - \frac{f(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$. Donc par Taylor Young

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{(x - \bar{x}) \frac{f''(\bar{x})}{2} + o((x - \bar{x})^2)}{\frac{(x - \bar{x}) f''(\bar{x}) + o(x - \bar{x})^2}{2}} \\ &= \frac{(\frac{1}{2} + o(1)) (\frac{1}{2} + o(1))}{1 + o(1)} \xrightarrow{x \rightarrow \bar{x}} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Théorème: Soit $F \in C^0(I, \mathbb{R})$, $x_0 \in I$, F dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$ et $F'(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l \in \mathbb{R}$

Alors, F dérivable en x_0 , $F'(x_0) = l$, et F' continue en x_0 .

Soit $x \in I \setminus \{x_0\}$. Par TAF, $\exists z_x \in]x_0, x[$ $F(x) - F(x_0) = F'(z_x)(x - x_0)$. Par encadrement,

$z_x \xrightarrow{x \rightarrow x_0} x_0$ et $F'(z_x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l$. Donc $\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = F'(z_x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l$ et F dérivable en x_0 , $F'(x_0) = l$.

Hennrichique: Pour résoudre $f(x) = 0$, on transforme le problème avec $F(x) = x$ point fixe

On peut choisir $F(x) = x + g(x)f(x)$, $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On veut $F(\bar{x}) = 0$ (cv d'ordre 2)

donc $F'(\bar{x}) = 1 + g'(\bar{x})f(\bar{x}) + g(\bar{x})f'(\bar{x}) = 0$, donc $g(\bar{x}) = -\frac{1}{f'(\bar{x})}$ et $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(\bar{x})}$

$F(x_n) = x_{n+1} \Leftrightarrow x_n - \frac{f(x_n)}{f'(\bar{x})} = x_{n+1} \Leftrightarrow x_n f'(\bar{x}) - f(x_n) - x_{n+1} f'(\bar{x}) = 0$

$\Leftrightarrow f'(\bar{x})(x_{n+1} - x_n) + f(x_n) = 0$, donc x_{n+1} abscisse

de l'intersection de T_{x_n} avec O_x aux abscisses.

