

Théorème de Fejér

Théorème: Si $f \in C_{2\pi}^1(\mathbb{R})$, alors $\| \sigma_N(f) \|_{\infty} \leq \| f \|_{\infty}$ et $\lim_{N \rightarrow \infty} \| \sigma_N(f) - f \|_{\infty} = 0$.

Si $f \in L_{2\pi}^p(\mathbb{R})$, $p \in [1, \infty[$, alors $\| \sigma_N(f) \|_p \leq \| f \|_p$ et $\lim_{N \rightarrow \infty} \| \sigma_N(f) - f \|_p = 0$.

$$\textcircled{1} \| \sigma_N(f) \|_{\infty} \leq \| f \|_{\infty} \quad \textcircled{2} \| \sigma_N(f) - f \|_{\infty} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad \textcircled{3} \| \sigma_N(f) \|_p \leq \| f \|_p \quad \textcircled{4} \| \sigma_N(f) - f \|_p \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

①

Soit $f \in C_{2\pi}^1(\mathbb{R})$. Alors $f \in L_{2\pi}^1(\mathbb{R})$ et est bornée. On a $\forall N \in \mathbb{N}^+$

$$\| \sigma_N(f) \|_{\infty} = \| f * F_N \|_{\infty} \leq \| f \|_{\infty} \| F_N \|_1 = \| f \|_{\infty}.$$

②

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est uniformément continue, $\exists \delta > 0$ tel que $\forall x, y \in \mathbb{R}$ on a

$$|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon. \text{ On a donc } \forall N \in \mathbb{N}^+, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} | \sigma_N(f)(x) - f(x) | &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) F_N(t) dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) F_N(t) dt \right| \quad \| F_N \|_1 = 1 \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| F_N(t) dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \leq \delta} |f(x-t) - f(x)| F_N(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{|t| > \delta} |f(x-t) - f(x)| F_N(t) dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \leq \delta} \varepsilon F_N(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{|t| > \delta} \frac{2\pi \| f \|_{\infty} \sin(\frac{N}{2})^4}{N \sin(\frac{t}{2})^2} dt \quad \text{TBA} \\ &\leq \varepsilon \| F_N \|_1 + 2\pi \| f \|_{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{|t| > \delta} \frac{1}{N \sin(\frac{t}{2})^2} dt \\ &\leq \varepsilon + \frac{2\pi \| f \|_{\infty}}{N \sin(\frac{\delta}{2})^2} \end{aligned}$$

Donc $\| \sigma_N(f) - f \|_{\infty} \leq \varepsilon + \frac{2\pi \| f \|_{\infty}}{N \sin(\frac{\delta}{2})^2}$, d'où $\limsup_{N \rightarrow \infty} \| \sigma_N(f) - f \|_{\infty} \leq \varepsilon$ et $\lim_{N \rightarrow \infty} \| \sigma_N(f) - f \|_{\infty} = 0$.

③

Soit $f \in L_{2\pi}^p(\mathbb{R})$. On a $\forall N \in \mathbb{N}^+$, $\frac{F_N}{2\pi} dx$ est une mesure de probabilité, par Holder $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \| \sigma_N(f) \|_p^p &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F_N + f(x)|^p dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \frac{F_N(t)}{2\pi} dt \right|^p dx \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|^p \frac{F_N(t)}{2\pi} dt dx \quad \text{Holder} \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(t) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|^p dx \right) dt \quad \text{Fubini-Tonelli} \\ &\leq \| F_N \|_1 \| f \|_p^p = \| f \|_p^p. \end{aligned}$$

④

De la même façon, on a $\forall N \in \mathbb{N}^+$

$$\begin{aligned} \| \sigma_N(f) - f \|_p^p &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) \frac{F_N(t)}{2\pi} dt \right|^p dx \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)|^p \frac{F_N(t)}{2\pi} dt dx \quad \text{Holder} \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \| \tau_{-t} f - f \|_p^p F_N(t) dt = o_N(g)(0) \quad \text{Fubini-Tonelli} \end{aligned}$$

Où $g: t \mapsto \| \tau_{-t} f - f \|_p^p$ continue, donc $o_N(g)(0) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} g(0) = 0$ par ②. Alors $\lim_{N \rightarrow \infty} \| \sigma_N(f) - f \|_p = 0$

Définitions: On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $e_n: x \in \mathbb{R} \mapsto e^{inx} \in \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $D_N := \sum_{n=-N}^N e_n$

Propositions: $D_N \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, paire, $D_N(x) = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}$ et $\forall f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$, $S_N f = f * D_N$

$$D_N(x) = e^{-iNx} \sum_{n=0}^{2N} (e^{ix})^n = e^{-iNx} \frac{e^{(N+1/2)ix} - 1}{e^{ix/2} - 1} = e^{iNx} \frac{\sin((N+1/2)x)}{\sin(x/2)}$$

$$\text{et } f * D_N = \sum_{n=-N}^N f * e_n = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e_n = S_N(f)$$

Définitions: On pose $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $F_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} D_k$ et $\sigma_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_k(f)$ $\forall f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$.

Propositions: $F_N(x) = \frac{\sin(N\frac{x}{2})^2}{N \sin(\frac{x}{2})}$ et $(F_N)_N$ A.U., $\sigma_N(f) = f * D_N$ $\forall f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$

$$NF_N(x) = \sum_{k=0}^{N-1} D_k = \frac{1}{\sin(\frac{x}{2})} \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{(k+1/2)ix} \right) = \frac{1}{\sin(\frac{x}{2})} \operatorname{Im} \left(e^{i\frac{x}{2}} \frac{e^{iNx} - 1}{e^{ix} - 1} \right) = \frac{1}{\sin(\frac{x}{2})} \operatorname{Im} \left(e^{i\frac{x}{2}} \frac{e^{iNx} - 1}{e^{ix} - 1} \right)$$

$$F_N \geq 0, F_N \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \|F_N\|_2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_k(x) dx = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} 1 = 1; \sigma_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f * D_k = f * F_N$$

Théorème: Pour $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $p \in [1, \infty]$, $a \mapsto \tau_a f$ est uniformément continue.

Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\varepsilon > 0$. Par Heine $\exists \delta > 0$, $|x-y| \leq \delta \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \varepsilon$. Donc on a

$$\|\tau_x \varphi - \tau_y \varphi\|_p^p = \int_K |\varphi(z-x) - \varphi(z-y)|^p dz \leq \varepsilon^p \lambda_d(K), \text{ où } \operatorname{supp} \varphi \subset K.$$

Donc $\forall |x-y| \leq \delta$, $\|\tau_x \varphi - \tau_y \varphi\|_p \leq \varepsilon \lambda_d(K)^{1/p}$ et $x \mapsto \tau_x \varphi \in C^0$. Maintenant, soit $\varepsilon > 0$

et $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\|f - \varphi\|_p < \varepsilon/3$. Puisque φ est C^0 , on a $\delta > 0$ tel que

$$\forall |x-y| \leq \delta, \|\tau_x f - \tau_y f\|_p \leq \|\tau_x f - \tau_x \varphi\|_p + \|\tau_x \varphi - \tau_y \varphi\|_p + \|\tau_y \varphi - \tau_y f\|_p$$

$$\leq 2\|f - \varphi\|_p + \varepsilon/3 \leq \varepsilon. \quad \square$$

Applications: ① (Weierstrass - trigonométrique) Si $f \in C_{\mathbb{R}}^\infty(\mathbb{R})$, $\exists (P_n)_n$ suite de polynômes trigonométriques, telle que $P_n \rightarrow f$ conv. ② Si $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, telle que

$\forall k \in \mathbb{Z}$ $c_k(f) = 0$, alors $f = 0$. ($c_k(f) = 0 \Rightarrow \sigma_N(f) = 0$, $\forall N \in \mathbb{N}^*$, et $\sigma_N(f) \rightarrow f$)

③ (enlever base H de $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ (d.N.b., $\pm$, et totale)