

## Projection sur un convexe fermé

Soit  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  E.V.H.,  $A \subset H$  un convexe fermé non vide

The: Si  $A \subset H$  est un convexe fermé, alors on a pour tout  $x \in H$ :

1)  $\exists! y \in A$  tel que  $\|x - y\| = d(x, A)$  noté  $\Pi_A(x)$  (projeté de  $x$  sur  $A$ )

2)  $\forall z \in A, \operatorname{Re} \langle x - y, z - y \rangle \leq 0 \Leftrightarrow y = \Pi_A(x)$ .

Existence 1) Soit  $\delta := d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$  telle que  $\|x - y_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \delta$ . On a  $\forall p, q \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} 2(\|x - y_p\|^2 + \|x - y_q\|^2) &= \|(x - y_p) + (x - y_q)\|^2 + \|(x - y_p) - (x - y_q)\|^2 \\ &= 4\|x - \frac{y_p + y_q}{2}\|^2 + \|y_p - y_q\|^2 \geq 4\delta^2 + \|y_p - y_q\|^2 \end{aligned}$$

Puisque  $A$  est convexe, on a  $\frac{y_p + y_q}{2} \in A$ . Donc pour  $p \leq q$

$$\|y_p - y_q\|^2 \leq 2(\|x - y_p\|^2 - \delta^2 + \|x - y_q\|^2 - \delta^2) \xrightarrow{p, q \rightarrow \infty} 0$$

Ainsi  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy dans  $A$  complet (car fermé d'un Hilbert),

ainsi elle converge vers  $y \in A$ . Par continuité,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\| = \|x - y\| = \delta$ .  $\square$

Unicité 1) S'il existe  $z \in A$  tel que  $\|x - y\| = \|x - z\| = \delta$ , on pose  $\forall n \in \mathbb{N}, y_n = \begin{cases} y & n \in 2\mathbb{N} \\ z & n \in 2\mathbb{N} + 1 \end{cases}$   
Alors  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$  vérifie  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\| = \delta$ . Donc elle converge, et  $y = z$ .  $\square$

( $\Rightarrow$ ) 2) Si on a  $y \in A$  tel que  $\forall z \in A, \operatorname{Re} \langle x - y, z - y \rangle \leq 0$  alors on a

$$\begin{aligned} \|x - z\|^2 &= \|x - y\|^2 + 2\operatorname{Re} \langle x - y, y - z \rangle + \|y - z\|^2 \\ &\geq \|x - y\|^2 \end{aligned}$$

Donc  $\|x - y\| = \inf_{z \in A} \|x - z\| = d(x, A)$  et  $y = \Pi_A(x)$

( $\Leftarrow$ ) 2) Soit  $z \in A$  et on pose  $\forall t \in [0, 1], z_t = tz + (1-t)\Pi_A(x) \in A$  (convexe). Alors

$$\|\Pi_A(x) - z\|^2 \leq \|z_t - z\|^2 = \|z_t - \Pi_A(x)\|^2 + 2\operatorname{Re} \langle z_t - \Pi_A(x), \Pi_A(x) - z \rangle + \|\Pi_A(x) - z\|^2$$

Puisque  $z_t - \Pi_A(x) = t(z - \Pi_A(x))$ , on a  $\forall t \in [0, 1]$

$$0 \leq t^2\|z - \Pi_A(x)\|^2 + 2t\operatorname{Re} \langle z - \Pi_A(x), \Pi_A(x) - z \rangle, \text{ donc}$$

$$\operatorname{Re} \langle \Pi_A(x) - z, \Pi_A(x) - z \rangle \leq \frac{1}{2}\|z - \Pi_A(x)\|^2$$

En faisant  $t \rightarrow 0$ , on a bien  $\operatorname{Re} \langle \Pi_A(x) - z, \Pi_A(x) - z \rangle \leq 0, \forall z \in A$ .  $\square$

Corollaire: la projection  $\pi_A: H \rightarrow A$  est 1-lipschitzienne

On a  $\forall x, y \in H, \forall z \in A, \operatorname{Re} \langle x - \pi_A(x), z - \pi_A(x) \rangle \leq 0$ , donc

$$\begin{aligned} \|\pi_A(x) - \pi_A(y)\|^2 &= \operatorname{Re} \langle \pi_A(x) - \pi_A(y), \pi_A(x) - \pi_A(y) \rangle \\ &= \operatorname{Re} \langle \pi_A(x) - \pi_A(y), \pi_A(x) - x \rangle + \operatorname{Re} \langle \pi_A(x) - \pi_A(y), x - y \rangle + \operatorname{Re} \langle \pi_A(x) - \pi_A(y), y - \pi_A(y) \rangle \\ &\leq 0 + |\langle \pi_A(x) - \pi_A(y), x - y \rangle| + 0 \leq \|\pi_A(x) - \pi_A(y)\| \|x - y\| \end{aligned}$$

Théorème: Soit  $F \subset H$  sEv, alors  $\forall x \in H (y = \pi_A(x) \Leftrightarrow y \in F, x - y \in F^\perp)$ , où  $F$  fermé

( $\Rightarrow$ ) Soit  $y := \pi_A(x)$ , on a  $\forall z \in F$  tq  $\|z\| = 1$  (mq  $\langle x - y, z \rangle = 0$ ), avec  $\lambda := \langle x - y, z \rangle \in \mathbb{C}$ :

$$\|x - y\|^2 = d(x, F)^2 \leq \|x - (y + \lambda z)\|^2 = \|x - y - \lambda z\|^2 = \|x - y\|^2 - 2\operatorname{Re} \lambda \langle x - y, z \rangle + |\lambda|^2 \|z\|^2$$

Donc  $0 \leq -2\operatorname{Re} \lambda + |\lambda|^2 = -|\lambda|^2$ , ie  $\lambda = 0$  et  $x - y \in F^\perp$

( $\Leftarrow$ ) Si  $y \in F, x - y \in F^\perp$ , on a  $d(x, F) = \inf_{z \in F} \|x - z\| = \inf_{z \in F} \|x - y + y - z\| = \|x - y\| \Rightarrow y = \pi_A(x)$  unique

Application:  $H = F \oplus F^\perp, F^{\perp\perp} = \overline{F}$  et  $(\overline{F} = H \Leftrightarrow F^\perp = \{0\})$

Si  $F$  sEv fermé, on a  $F \cap F^\perp = \{0\}$  et  $\forall x \in H, x = \pi_F(x) + (x - \pi_F(x)) \in F + F^\perp$ , d'où  $H = F \oplus F^\perp$ .

Si  $F$  sEv, on a  $H = \overline{F} \oplus \overline{F}^\perp = \overline{F} \oplus F^\perp$  et avec  $F^\perp, H = F^{\perp\perp} \oplus F^\perp$ . Comme  $\overline{F} \subset F^{\perp\perp}$ , on a  $\overline{F} = F^{\perp\perp}$ .

( $\forall x \in F^{\perp\perp} \Rightarrow x = y + z \in \overline{F} \oplus F^\perp, x - y = z \in F^{\perp\perp} \cap F^\perp = \{0\}$ , d'où  $x = y \in \overline{F}$ ). Et  $\overline{F} = H \Leftrightarrow \overline{F}^\perp = F^\perp = H^\perp = \{0\}$ .

Théorème: Soit  $\phi \in H^*$ , mq  $\exists! y \in H, \forall x \in H \phi(x) = \langle x, y \rangle$ .

Si  $\phi = 0, y = 0$  ok. Sinon  $F := \ker \phi = \phi^{-1}(\{0\})$  fermé, de codim 1 donc  $\dim F^\perp = 1$ .

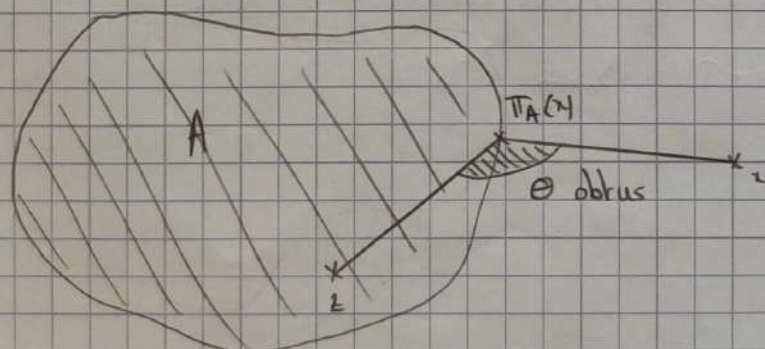
Soit  $u \in F^\perp, \|u\| = 1, y := \overline{\phi(u)} u \in F^\perp$ . On a  $\forall x = v + \lambda u \in F \oplus F^\perp = H, \phi(x) = \phi(v) + \lambda \phi(u)$

Or  $\phi(v) = 0, \phi(u) = \phi(u) \langle u, u \rangle = \langle u, y \rangle$ , donc  $\phi(x) = \lambda \langle u, y \rangle = \langle v + \lambda u, y \rangle = \langle x, y \rangle$ .

L'unicité vient de  $J: y \in H \mapsto (x \mapsto \langle x, y \rangle) \in H^*$  isométrie donc injective.

Dessin: Projection et caractérisation

$$\forall z \in A, \operatorname{Re} \langle x - \pi_A(x), z - \pi_A(x) \rangle \stackrel{R}{=} \|x - \pi_A(x)\| \|z - \pi_A(x)\| \cos \theta \leq 0 \Leftrightarrow \cos \theta \leq 0$$



$$\Leftrightarrow \theta = \widehat{\langle x - \pi_A(x), z - \pi_A(x) \rangle}$$

obtus ( $\in [\pi/2, \pi]$ )