

Densité de polynômes orthogonaux

Theorème: Si l'existe $\alpha > 0$ tel que $\int_{\mathbb{R}} e^{\alpha|x|} p(x) dx < \infty$, alors $(P_n)_n$ est une base hilbertienne de $L^2(I, p)$.

Par construction $(P_n)_n$ est une famille orthogonale de $L^2(I, p)$. Il suffit de montrer que $(P_n)_n$ est totale, i.e. $\text{Vect}((P_n)_n)^\perp = \text{Vect}(\{e_n\}_n)^\perp = \{0\}$. Soit $f \in \text{Vect}(\{e_n\}_n)^\perp$ et $\Phi := \int p \cdot 1_{\frac{\alpha}{2}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

On pose $B_\alpha := \{z \in \mathbb{C} \mid |\text{Im} z| < \frac{\alpha}{2}\}$



- ① $\Phi \in L^1(\mathbb{R})$ ② $\hat{\Phi}$ holomorphe sur B_α ③ $\hat{\Phi} = 0$ sur B_α ④ Conclusion

① Puisque $\forall t \geq 0 \quad (t-1)^2 = t^2 - 2t + 1 \geq 0$, on a $t \leq \frac{1}{2}(1+t^2)$ donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\Phi(x)| dx &= \int_{\mathbb{R}} |f(x)| p(x) dx \\ &\leq \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} p(x) dx}_{< \infty \text{ p poids}} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} |f(x)|^2 p(x) dx}_{< \infty \text{ } f \in L^2(I, p)} < \infty \end{aligned}$$

Donc $\Phi \in L^1(\mathbb{R})$ et on peut considérer sa transformée $\hat{\Phi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

- ② On pose $g : B_\alpha \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ * $\forall \xi \in B_\alpha, x \mapsto g(\xi, x)$ est mesurable sur $\mathbb{R}$
 $(\xi, x) \mapsto e^{-i\xi x} \Phi(x)$ * $\forall x \in \mathbb{R}, \xi \mapsto g(\xi, x)$ est holomorphe sur B_α
 * $\forall \xi \in B_\alpha, \forall x \in \mathbb{R} \quad |g(\xi, x)| \leq e^{|\text{Im} \xi| |x|} |\Phi(x)|$
 $\leq e^{\frac{\alpha}{2}|x|} |f(x)| p(x) =: h(x)$

Où par Cauchy-Schwarz, $h \in L^1(\mathbb{R})$ car :

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}} h(x) dx \right)^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}} (e^{\frac{\alpha}{2}|x|} p(x)^{1/2}) (|f(x)| p(x)^{1/2}) dx \right)^2 \\ &\leq \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} e^{\alpha|x|} p(x) dx \right)}_{< \infty \text{ hypothèse}} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} p(x) |f(x)|^2 dx \right)}_{< \infty \text{ } f \in L^2(I, p)} < \infty \end{aligned}$$

Par théorème d'holomorphie, $\hat{\Phi}$ est bien définie et holomorphe sur B_α .

- ③ Notamment, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall \xi \in B_\alpha$ on a $\hat{\Phi}^{(n)}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} (-ix)^n e^{-i\xi x} \Phi(x) dx$. Donc
 $\hat{\Phi}^{(n)}(0) = (-i)^n \int_{\mathbb{R}} x^n f(x) p(x) dx$
 $= (-i)^n \langle f, e_n \rangle = 0$ car $f \in \text{Vect}(\{e_n\}_n)^\perp$

Puisque $\hat{\Phi}$ holomorphe, elle est analytique sur $D(0, R)$ pour $R > 0$, donc $\forall \xi \in D(0, R)$

$$\hat{\Phi}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{\Phi}^{(n)}(0)}{n!} \xi^n = 0$$

Puisque $B_\alpha \subset \mathbb{C}$ est un ouvert connexe, par prolongement analytique on a $\hat{\Phi} = 0$ sur B_α

- ④ Notamment $\hat{\Phi} = 0$ sur $\mathbb{R}$ et par injectivité de $\mathcal{F}$, $\Phi = 0$. Donc $f = 0$ et $(P_n)_n$ base hilbertienne.

Définition: Sur $I \subset \mathbb{R}$ intervalle, $p: I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est une fonction poids si elle est mesurable et vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, \int_I |x|^n p(x) dx < \infty$. On pose $L^2(I, p) = \{f: I \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable} \mid \int_I |f|^2 p dx < \infty\}$ espace de Hilbert muni de $\langle f, g \rangle_p := \int_I f \bar{g} p dx, \forall f, g \in L^2(I, p)$.

Proposition: Si $p: I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ poids et $p \in [1, \infty[$, alors $\forall n \in \mathbb{N} \text{ en } x \mapsto x^n \text{ est } L^2(I, p)$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $\int_I |x|^{2n} p dx = \int_I |x|^{np} p(x) dx \leq \int_I (1 + |x|^{(np)+1}) p(x) dx < \infty$

Théorème: Soit $(e_n)_n \in H^\infty$ famille de H espace préhilbertien. Il existe une unique famille orthonormée $(q_n)_n \in H^\infty$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\text{Vect}(\{x_k\}_{k=0}^n) = \text{Vect}(\{q_k\}_{k=0}^n) \quad \text{et} \quad \langle x_n, q_n \rangle > 0$$

Remarque: L'algorithme de Gram Schmidt donne $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ famille orthonormée de $L^2(I, p)$ à partir de $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Contre-exemple: Sur $I = \mathbb{R}_+^*$, $p: x \mapsto x^{-\ln(x)}$ et $f: x \mapsto \sin(2\pi \ln(x))$

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, \langle f, e_n \rangle_p = 0$ mais $f \neq 0$

$$\begin{aligned} \langle f, e_n \rangle_p &= \int_I x^n f(x) p(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} x^n \sin(2\pi \ln(x)) x^{-\ln(x)} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (e^y)^n \sin(2\pi y) (e^y)^{-y} e^y dy && y = \ln x, x = e^y, dx = e^y dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi y) e^{ny - y^2 + y} dy \\ &= e^{\frac{(n+1)^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi y) e^{-\left(y - \frac{n+1}{2}\right)^2} dy \\ &= e^{\frac{(n+1)^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi(u + \frac{n+1}{2})) e^{-u^2} du && u = y - \frac{n+1}{2}, y = u + \frac{n+1}{2}, dy = du \\ &= e^{\frac{(n+1)^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi u) e^{-u^2} du = 0 && u \mapsto \sin(2\pi u) e^{-u^2} \text{ impaire sur } \mathbb{R} \text{ sym} \end{aligned}$$

Où on a $\int_{\mathbb{R}_+^*} e^{\alpha \ln x} x^{-\ln x} dx = +\infty$ car $e^{\alpha \ln x} x^{-\ln x} = e^{(\alpha+1)\ln(x)^2} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} +\infty$ non intégrable

Et p est bien une fonction poids car $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

$$x^{-2} |x|^n p(x) = e^{\frac{(n+1)^2}{4}} e^{-\ln(x)^2} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0, |x|^n p(x) = O\left(\frac{1}{x}\right), \sqrt{x} |x|^n p(x) = e^{\frac{(n+1)^2}{4}} e^{-\ln(x)^2} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0, |x|^n p(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

Application: $\forall n \in \mathbb{N}, H_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n e^{\frac{n^2}{4}} \hat{x}_n(e^{-x})$, $p: x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$, alors $(\sqrt{p} H_n)_n$ base L^2

On p poids sur $\mathbb{R}$, $\langle H_n, H_m \rangle = 0 \forall n \neq m$ et $\forall x > 0, \int_{\mathbb{R}} e^{\alpha \ln x} p(x) dx < \infty$. Donc $(H_n)_n$ base H de

$L^2(\mathbb{R}, p)$. Soit $\Phi: f \in L^2(\mathbb{R}, p) \mapsto \sqrt{p} f \in L^2(\mathbb{R})$ isométrie, donc $(\Phi(H_n))_n$ base H de $L^2(\mathbb{R})$. $\square$