

Indécomposabilité de la loi de Poisson

Théorème : Si $X, Y: \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ indépendantes telles que $X+Y=Z \sim P(\lambda)$, alors X et Y de Poisson

On sait que $G_Z(s) = e^{\lambda(s-1)} \forall s \in \mathbb{C}$ car série entière de rayon de convergence $+\infty$. Donc $G_Z \in \text{et}(\mathbb{C})$

① $G_X \in \text{et}(\mathbb{C})$ ② $G_X = e^f, f \in \text{et}(\mathbb{C})$ ③ $\text{Re} f(s) \leq \ln C + \lambda |s|$ ④ $f(s) = a_0 + a_1 s$ ⑤ $X \sim P(a_1)$

① On pose $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = P(X=n)$ et $y_n = P(Y=n)$. On a $\forall s \in D(0,1)$, par indépendance de X et Y .

$$G_Z(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} s^n = G_X(s) G_Y(s) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n s^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n s^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n x_k y_{n-k} \right) s^n$$

Par unicité du développement, $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} = \sum_{k=0}^n x_k y_{n-k}$. Notamment, $\frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \geq x_n y_0$

et $e^{-\lambda} = x_0 y_0 > 0$. Donc $y_0 > 0$ et $x_n \leq \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{y_0 n!}$, borne général d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$. Donc celui de $\sum_{n \geq 0} x_n s^n$ est $+\infty$, ie $G_X \in \text{et}(\mathbb{C})$ entière.

② De plus, $G_X(s) G_Y(s) = e^{\lambda(s-1)} \forall s \in D(0,1)$. Par prolongement analytique, c'est vrai $\forall s \in \mathbb{C}$.

Puisque $e^{\lambda(s-1)} \neq 0 \forall s \in \mathbb{C}$, on a $G_X \neq 0$ sur $\mathbb{C}$. Alors $\exists f \in \text{et}(\mathbb{C})$, telle que $e^f = G_X$.

③ On a $\forall s \in \mathbb{C}, |G_X(s)| = e^{\text{Re} f(s)} \leq G_X(|s|)$, car $x_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$, et $y_0 = |G_Y(0)| \leq G_Y(|s|)$

Donc $\forall s \in \mathbb{C} \quad y_0 e^{\text{Re} f(s)} \leq G_X(|s|) G_Y(|s|) = e^{\lambda(|s|-1)}$. Soit $C = \frac{e^{-\lambda}}{y_0} > 0$, on a $e^{\text{Re} f(s)} \leq C e^{\lambda |s|}$ et $\text{Re} f(s) \leq \ln C + \lambda |s|$

④ Soit $r > 0$ fixé. On pose $A(r) = \ln C + \lambda r$ et $f_r: t \in \mathbb{R} \mapsto f(re^{it}) \in \mathbb{C}$, 2π -périodique et C^1 .

Puisque $f \in \text{et}(\mathbb{C})$, $\exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que $\forall s \in \mathbb{C} \quad f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$. Donc $\forall r \in \mathbb{R}, f_r(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{i n t}$

qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$. On en déduit que :

$$\forall n \geq 0 \quad a_n r^n = c_n(f_r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_r(t) e^{-i n t} dt \quad \text{et} \quad \forall m < 0 \quad 0 = c_m(f_r) = c_m(f_r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_r(t) e^{i m t} dt$$

$$\text{Donc} \quad \forall n \geq 2, \quad a_n r^n + 0 = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Re} f_r(t) e^{-i n t} dt = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\text{Re} f_r(t) - A(r)) e^{-i n t} dt, \quad \text{car} \quad \int_0^{2\pi} e^{-i n t} dt = 0$$

$$\text{Alors} \quad |a_n| \leq \frac{1}{r^n} \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\text{Re} f_r(t) - A(r)| dt = \frac{2}{r^n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |A(r) - \text{Re} f_r(t)| dt \quad \text{d'après ③}$$

$$\leq \frac{2}{r^n} (A(r) - \text{Re} c_0(f_r)) = \frac{2}{r^n} (\ln C + \lambda r - \text{Re}(a_0)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall n \geq 2$$

On en déduit que $\forall s \in \mathbb{C}, f(s) = a_0 + a_1 s$.

⑤ On a $\forall s \in \mathbb{C}, G_X(s) = e^{a_0 + a_1 s}$. En $s=1, 1 = G_X(1) = e^{a_0 + a_1}$, d'où $e^{a_0} = e^{-a_1}$

et $G_X(s) = e^{a_1(s-1)}$. De plus, $G_X \in \text{et}(\mathbb{C})$, donc $E(X) = G_X'(1) = a_1 \geq 0$, car $X: \Omega \rightarrow \mathbb{N}$.

On en déduit que $X \sim P(a_1)$. Par symétrie, Y est de Poisson.

Proposition: Si $X, Y: \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ indépendantes, alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$

On a $\forall s \in D(0,1)$ $x \mapsto s^x$ continue donc mesurable. Donc s^X et s^Y indépendantes.

$$G_{X+Y}(s) = E[s^{X+Y}] = E[s^X s^Y] \stackrel{I.I.}{=} E[s^X] E[s^Y] = G_X(s) G_Y(s)$$

Proposition: Si $X \sim P(\lambda)$, $Y \sim P(\mu)$, $X \perp Y$, alors $G_X(s) = e^{\lambda(s-1)}$ et $X+Y \sim P(\lambda+\mu)$

$$\text{On a } \forall s \in D(0,1) \quad G_X(s) = E[s^X] = \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n) s^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} s^n = e^{-\lambda} e^{\lambda s} = e^{\lambda(s-1)}$$

Donc $\forall s \in D(0,1)$, $G_{X+Y}(s) = G_X(s) G_Y(s) = e^{\lambda(s-1)} e^{\mu(s-1)} = e^{(\lambda+\mu)(s-1)}$, et $X+Y \sim P(\lambda+\mu)$.

Lemme 1: Soit $(a_n, b_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $|a_n| \leq |b_n| \forall n \in \mathbb{N}$. Alors le Ra de $\sum a_n z^n$ vérifie $R_a \geq R_b$.

On a $\forall z \in D(0, R_b)$, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |b_n z^n| < \infty$. Donc $\sum a_n z^n$ cv sur $D(0, R_b) \subset D(0, R_a)$

D'où $R_b \leq R_a$.

Lemme 2: Soit $F \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, $F \neq 0$ sur $\mathbb{C}$. Alors $\exists f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, $e^f = F$.

On a $\frac{F'}{F} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) = \mathcal{H}(\mathbb{C})$, donc admet une primitive $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$: $g' = \frac{F'}{F}$.

Soit $h = e^{-g} F \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. On a $h' = -g' e^{-g} F + e^{-g} F' = -F' e^{-g} + e^{-g} F' = 0$.

Donc $\forall z \in \mathbb{C}$, $h(z) = \alpha$ constante, avec $\alpha \neq 0$ ($e^{-g} > 0$, $F \neq 0$). Donc $\exists \beta \in \mathbb{C}$

tel que $e^f = \alpha$. Alors $f := g + \beta \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ et $e^f = e^g e^\beta = e^g \alpha = e^g h = F$. $\square$

Lemme 3: Soit $F(h) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inh}$ converge uniformément $\forall h \in \mathbb{R}$. Alors $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(F) = c_n$.

Par cvu, $F \in C_{\text{per}}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, donc on a $\forall n \in \mathbb{Z}$ $c_n(F)$ bien défini et

$$\begin{aligned} c_n(F) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \right) e^{-int} dt \stackrel{cvu}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikt} e^{-int} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta_{kn} = c_n. \end{aligned}$$

De plus, on a donc $F(h) = S(F)(h) \forall h \in \mathbb{R}$.