

Log-convexité de Γ Proposition: Γ est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ On pose $f: \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$. On sait que $\forall x > 0$, $f(x, t) \mapsto f(x, t)$ est C^∞ . $(t, z) \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ On a $\forall k \in \mathbb{N}, \forall [a, b] \subset \mathbb{R}_+^*, \forall x \in [a, b], \forall t > 0$

$$|f^{(k)}(t, z)| = |\ln(t)^k t^{x-1} e^{-t}| \leq |\ln(t)|^k t^{a-1} e^{-t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} (1/t^{1/2}) \quad t \in]0, 1[$$

$$|\ln(t)|^k t^{b-1} e^{-t} \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} (1/t^2) \quad t \in]1, \infty[$$

Puisque $\forall x > 0$, f_x est mesurable, par théorème de dérivation, on en déduit que Γ est C^∞ .Thé: la seule fonction $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ log convexe vérifiant $f(1) = 1$, $f(x+1) = x f(x)$ est $f(x) = \Gamma(x)$.On pose $g = \ln \Gamma$, donc g est C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $g' = \frac{\Gamma'}{\Gamma}$ et $g'' = \frac{\Gamma'' \Gamma - (\Gamma')^2}{\Gamma^2}$, $\forall x > 0$.

$$\Gamma''(x) = \left(\int_0^{+\infty} (\ln(t) t^{\frac{x-1}{2}} t^{\frac{x-1}{2}}) dt \right)^2 \quad \text{par Cauchy-Schwarz}$$

$$\leq \left(\int_0^{+\infty} \ln(t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt \right) \left(\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \right) = \Gamma''(x) \Gamma(x)$$

Donc $g'' \geq 0$ et Γ est log-convexe. Réciproquement, si $\forall x > 0$ $f(x+1) = x f(x)$ alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) = (n-1) \dots (2) f(1) = (n-1)!$ et $f(x+n) = (x+n-1) \dots (x+1) x f(x)$ On a $\ln f$ convexe donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in (0, 1]$ l'inégalité des 3 pentes appliquée à $n, n+1, n+x+1$

$$\ln f(n) - \ln f(n+1) \leq \frac{\ln f(n+x+1) - \ln f(n+1)}{n+x+1 - (n+1)} \leq \frac{\ln f(n+2) - \ln f(n+1)}{n+2 - (n+1)}$$

Puisque $\ln f(n+1) - \ln f(n) = \sum_{k=1}^n \ln(k) - \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) = \ln(n)$, on a

$$\ln(n) \leq \frac{\ln f(n+x+1) - \ln f(n)}{x} \leq \ln(n+1) \Leftrightarrow \ln(n^n n!) \leq \ln f(n+x+1) \leq \ln((n+1)^n n!)$$

Comme $\exp$ est croissante, on a

$$n^n n! \leq (n+n) \dots (n+1) x f(x) \leq (n+1)^n n! = n^n n! \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \Leftrightarrow 1 \leq (n+1) \dots (n+1) x f(x) \leq \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

$$\text{Or, } \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e, \text{ donc par encadrement } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n n!}{(n+n) \dots (n+1)x} = \Gamma(x)$$

Finalement, f étant 1-périodique on en déduit que $\Gamma = f$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

lemme: Γ est bien définie, $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x) \forall x > 0$ et $\Gamma(1) = 1$

On a $\forall x > 0$, $f_x: t \mapsto f(t, x) = t^{x-1} e^{-t}$ continue donc localement intégrable

* $f_x(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ intégrable en $+\infty$
 * $f_x(t) \sim \frac{1}{t^{1-x}}$ intégrable en 0 ($1-x < 1$) } Donc f_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et Γ bien def.

On a $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$ et $\forall x > 0$

$$\Gamma(x+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n t^x e^{-t} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-t^x e^{-t} \right]_0^n + \int_0^n x t^{x-1} e^{-t} dt = x \Gamma(x)$$

lemme: On a $\forall x > 0$, $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $f_n: \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+$ $\Gamma_n: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$

$$(t, x) \mapsto \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \mathbb{1}_{\text{comp}}^{(n)} \quad x \mapsto \int_0^\infty f_n(t, x) dt$$

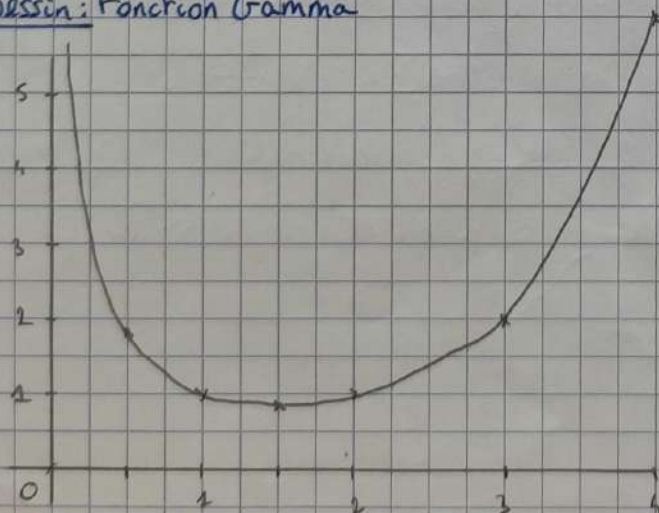
* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $f_n: t \mapsto f_n(t, x)$ mesurable car continue } Par convergence dominée on a
 * $f_n(t, x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(t, x)$
 * $|f_n(t, x)| \leq f(t, x)$ int en t sur $\mathbb{R}_+^*$, $\forall x > 0$ } $\Gamma_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Gamma(x) \forall x > 0$

On a $\forall x > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \Gamma_n(x) &= \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt & I_n(x) &= \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du \\ &= \int_0^1 (1-u)^n (nu)^{x-1} n du & &= \left[\frac{1}{x} (1-u)^n \right]_0^1 + \int_0^1 n(1-u)^{n-1} \frac{1}{x} u^x du \\ &= n^x I_n(x) & &= \frac{n}{x} I_{n-1}(x+1) \end{aligned}$$

Donc par IPP successives, $\Gamma_n(x) = \frac{n^x n(n-1)\dots 2 \cdot 1}{x(x+1)\dots(x+n-1)} \times \underbrace{I_0(x+n)}_{= \frac{1}{n+n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Gamma(x)$

Dessin: Fonction Gamma



$$\Gamma(2) = 1 \Gamma(1) = 1; \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \approx 1.8; \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right); \Gamma(n) \sim \frac{1}{n} \text{ as } n \rightarrow 0; \Gamma(n) \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \text{ as } n \rightarrow \infty$$