

215 229
219 253
223
226

15', 00''

Ciarlet
p. 183, 189

Méthode du gradient à pas optimal

Thé: Soit $K \subset E$ convexe où E euclidien, et $f \in C^1(K, \mathbb{R})$ tel que $\exists \alpha > 0, \forall x, y \in K$
 $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \alpha \|x - y\|^2$. Alors f admet un unique min global $x^* \in K$

De plus, la suite $(x_n) \in K^N$ définie par $x_0 \in K, x_{n+1} = x_n - p_n \nabla f(x_n) \forall n \in \mathbb{N}$ où
 $p_n := \arg \min_{p \geq 0} f(x_n - p \nabla f(x_n))$, est bien définie et converge vers x^* .

f str. conv ①

On a $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ par Taylor reste intégrale

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 \langle \nabla f(x + t(y-x)), y-x \rangle dt$$

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x), y-x \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(x + t(y-x)) - \nabla f(x), y-x \rangle \frac{1}{t} dt \\ &\geq \int_0^1 \alpha \|t(y-x)\|^2 \frac{1}{t} dt = \frac{\alpha}{2} \|y-x\|^2. \end{aligned}$$

Donc, pour $x \neq y$ on a $f(y) > f(x) + \langle \nabla f(x), y-x \rangle$

f coercive ②

On a $\forall y \in \mathbb{R}^n$ $f(y) \geq f(0) + \langle \nabla f(0), y \rangle + \frac{\alpha}{2} \|y\|^2 \geq f(0) - \|\nabla f(0)\| \|y\| + \frac{\alpha}{2} \|y\|^2 \xrightarrow{\|y\| \rightarrow \infty} +\infty$

Puisque f est strictement convexe, continue, coercive elle admet un unique min $x^* \in K$.

(x_n) bien def ③

Soit $x \in K$ tel que $\nabla f(x) \neq 0$, on pose $\varphi_x: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ qui est C^1 et coercive

Donc φ_x admet un min global $p \geq 0$ $p \mapsto f(x - p \nabla f(x))$

Puisque $\forall p \in \mathbb{R}_+, \varphi'_x(p) = \langle \nabla f(x - p \nabla f(x)), \nabla f(x) \rangle$ et $\varphi'_x(p_x) = 0$, on a si $p \neq p_x$

$$\varphi_x(p) > \varphi_x(p_x) + \langle \nabla f(x - p_x \nabla f(x)), (p - p_x) \nabla f(x) \rangle$$

$$> \varphi_x(p) + (p_x - p) \varphi'_x(p_x) \quad \text{et } p_x \text{ est unique.}$$

(x_n) cv ④

① $(f(x_n))_n$ cv $\rightarrow$ ② $(\varphi_{x_n}(p_n))_n$ cv $\rightarrow$ ③ $(\varphi_{x_n}(p_n))_n$ cv $\rightarrow$ ④ $(x_n)_n$ cv

a)

Si $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $x_N = x^*$, alors $(x_n)_{n \geq N}$ stationne. Sinon $\forall n \in \mathbb{N}$ on a

$f(x^*) \leq f(x_{n+1}) = \varphi_{x_n}(p_n) \leq \varphi_{x_n}(0) = f(x_n)$. Donc $(f(x_n))_n$ converge (décroissante, majorée).

b)

De plus $x_n \in K_0 := f^{-1}([-\infty, f(x_n)])$ compact (fermé borné en dim $E < \infty$ car f continue coercive)

Par Bolzano Weierstrass, $\exists \psi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ extraite telle que $x_{\psi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \in K$

c)

$$\text{On a } \frac{\alpha}{2} \|x_n - x_{n+1}\|^2 \leq f(x_n) - f(x_{n+1}) - \langle \nabla f(x_{n+1}), x_n - x_{n+1} \rangle = f(x_n) - f(x_{n+1}) - p_n \langle \nabla f(x_{n+1}), \nabla f(x_{n+1}) \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Donc $x_{\psi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x^*$

d)

$$\text{Puisque } f \text{ est } C^1, 0 = \langle \nabla f(x_{\psi(n)}), \nabla f(x_{\psi(n)}) \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|\nabla f(x)\|^2$$

Finalement $\nabla f(x) = 0$ donc $x = x^*$ unique valeur d'adhérence de (x_n) .

Lm 1: Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Alors f strictement convexe $\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}^n, x \neq y$
 $f(y) > f(x) + \langle \nabla f(x), y-x \rangle$.

$$\begin{aligned} (\Rightarrow) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall 0 < t < 1: x + t(y-x) &= \frac{t-1}{t}x + \frac{1}{t}(x + t(y-x)) \\ \Rightarrow \underbrace{f(x + t(y-x)) - f(x)}_t &< \underbrace{\frac{t-1}{t}f(x) + \frac{1}{t}f(x + t(y-x)) - \frac{t-1}{t}f(x)}_{\frac{1}{t}} = \frac{(t-1)f(x) + f(x + t(y-x)) - tf(x)}{t} \\ &< \frac{f(x + t(y-x)) - f(x)}{t} = \frac{f((1-t)x + ty) - f(x)}{t} \\ &< \frac{(1-t)f(x) + tf(y) - f(x)}{t} = f(y) - f(x) \end{aligned}$$

On fait $t \rightarrow 0$ et on a $\langle \nabla f(x), y-x \rangle < f(y) - f(x)$. $\square$

$$(\Leftarrow) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall t \in]0, 1[$$

$$\begin{aligned} f(x) &> f(x + t(y-x)) + \langle \nabla f(x + t(y-x)), -t(y-x) \rangle \\ f(y) &> f(x + t(y-x)) + \langle \nabla f(x + t(y-x)), (1-t)(y-x) \rangle \\ \Rightarrow (1-t)f(x) + tf(y) &> f(x + t(y-x)) + 0 \quad \square \end{aligned}$$

Lm 2: $f \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ coercive, alors $\exists x^* \in \mathbb{R}^n$ tq $f(x^*) = \min f$

Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et $K := f^{-1}([-\infty, f(a)])$. Comme f continue, K fermé. Si K non bornée
 $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K$ tq $\|x_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$, or $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ (coercive) et $f(x_n) \leq f(a) < +\infty$. ∇

Donc K compact, par TBA, $\exists x^* \in K$ tq $\forall x \in K, f(x^*) \leq f(x)$

Et $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus K, f(x) > f(a) \geq f(x^*)$. Donc $f(x^*) = \min f$.

Lm 3: $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ strictement convexe, alors f admet au plus un min global.

Si $\exists x^*, y^* \in \mathbb{R}^n$ tq $f(x^*) = f(y^*) = \min f$ et $x^* \neq y^*$, alors $\forall t \in]0, 1[$

$$\min f \leq f(x^* + t(y^* - x^*)) < t f(x^*) + (1-t) f(y^*) = \min f \quad \nabla$$

Lm 4: $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable, alors $x^* = \arg \min_{\mathbb{R}^n} f \Leftrightarrow \nabla f(x^*) = 0$

$$(\Rightarrow) \quad \text{Soit } \varphi: t \in [0, 1] \mapsto f(x^* + t(y - x^*)) \text{ où } y \in K, \text{ on a } \varphi'(1) = \langle \nabla f(x^* + t(y - x^*)), y - x^* \rangle$$

$$\text{et } \varphi'(0) = \langle \nabla f(x^*), y - x^* \rangle. \text{ Or } 0 \geq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(1) - \varphi(0)}{t} = \varphi'(0) \geq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(1) - \varphi(0)}{t} \geq 0 \text{ car } \varphi(1) \leq \varphi(0)$$

Donc $\varphi'(0) = 0$ et $\nabla f(x^*) = 0$

$$(\Leftarrow) \quad \text{Si } \nabla f(x^*) = 0, \text{ on a } \forall x \in K$$

$f(x^*) \geq f(x) + \langle \nabla f(x^*), x^* - x \rangle = f(x)$ et x^* min global (pas forcément unique)
 si f strictement convexe $\Rightarrow x^*$ unique car $\forall x \neq x^*, f(x^*) > f(x)$.

