

Générateurs de $GL_n(K)$, $SL_n(K)$ + Connexité par arc

Théorème: les transvections et dilatactions engendrent $GL_n(K)$: toute matrice $A \in GL_n(K)$ s'écrit $A = \left(\prod_{k=1}^r P_k \right) D_n(\det A) \left(\prod_{k=1}^s Q_k \right)$ où P_k et Q_k transvections.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^+$ (H_n): $(\forall A \in GL_n(K), A = \left(\prod P_k \right) D_n(\det A) \left(\prod Q_k \right))$.

Initialisation: Pour $n=1$, $A \in GL_1(K)$ s'écrit $A = (\det A) = D_1(\det A)$

Hérédité: Supposons (H_{n-1}) vraie et soit $A \in GL_n(K)$

① Se ramener à $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & (*) & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ ② Puis $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & (*) & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ ③ Pour avoir $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \\ & & B & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ ④ Appliquer (H_{n-1}) à B.

① Puisque A inversible, sa première colonne est non nulle et $\exists i \in \{1, n\}$ $a_{i1} \neq 0$. On effectue l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + \lambda L_i$ où $\lambda \in K$ vérifie $a_{i1} + \lambda a_{i1} = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1-a_{i1}}{a_{i1}}$

On a donc multiplié A à gauche par $T_{i1}(\lambda)$ pour avoir $T_{i1}(\lambda)A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & (*) & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$.

② Ensuite, $\forall i \in \{2, n\}$ on fait $L_i \leftarrow L_i - a_{i1} L_1$, ie on multiplie A à gauche par des transvections (R_{i1}) , on a $\left(\prod R_i \right) A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & (*) & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

③ De la même façon on multiplie à droite par (S_j) tel que $\left(\prod R_i \right) A \left(\prod S_j \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \\ & & B & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

④ Alors $B \in M_{n-1}(K)$ vérifie $\det B = \det A \neq 0$. On applique (H_{n-1}) à B et on a des transvections $(P_k)_k, (Q_k)_k$ telles que $B = \left(\prod P_k \right) D_{n-1}(\det B) \left(\prod Q_k \right)$. On pose $\forall k$ et $\forall l$ $P_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \\ & & P_k & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ et $Q_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \\ & & Q_k & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ transvections de $GL_n(K)$. Alors A s'écrit $A = \left(\prod R_i \right)^{-1} \left(\prod P_k \right) D_n(\det A) \left(\prod Q_k \right) \left(\prod S_j \right)^{-1}$ et (H_n) vraie par récurrence.

Corollaire: $SL_n(K)$ et $GL_n(\mathbb{C})$ sont connexes par arc

Soit $A \in SL_n(K)$, puisque $\det A = 1$ on a $A = \prod_{k=1}^r T_k(\lambda_k)$ où $\lambda_k \in K$. On pose $\gamma_k: [0,1] \rightarrow SL_n(K)$

Alors, $\forall k \in \{1, r\}$ γ_k continue, $\gamma_k := \prod_{k=1}^r \gamma_k$ aussi et $\gamma(0) = I_n, \gamma(1) = A$. $t \mapsto T_k(t\lambda_k)$

Alors $SL_n(K)$ est connexe par arc

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Puisque $\mathbb{C}^*$ connexe par arc, $\exists \gamma \in C^0([0,1], \mathbb{C}^*)$ tel que $\gamma(0) = 1, \gamma(1) = \det A$

De plus, $A = \left(\prod P_k(\lambda_k) \right) D_n(\det A) \left(\prod Q_k(\mu_k) \right)$, donc on pose le chemin continu

$\gamma: [0,1] \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ et vérifie $\gamma(0) = I_n, \gamma(1) = A$. D'où $GL_n(\mathbb{C})$ connexe par arc.

$$t \mapsto \left(\prod P_k(t\lambda_k) \right) D_n(\gamma(t)) \left(\prod Q_k(t\mu_k) \right)$$

Définition: On note $(E_{ij})_{ij}$ la base canonique de $M_n(K)$. On définit $\forall i \in [1, n]$

- $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$ matrice de transvection, $\lambda \in K$

- $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{ii}$ matrice de dilatation, $\lambda \in K^*$

Corollaire: $GL_n(\mathbb{R}) = GL_n^+(\mathbb{R}) \cup GL_n^-(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arc

On a $GL_n^+(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ et $GL_n^-(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}_-^*)$ ouverts disjoints

Soit $A \in GL_n^+(\mathbb{R})$, on a $A = \left(\prod_k P_k(\lambda_k) \right) D_n(\det A) \left(\prod_l Q_l(\mu_l) \right)$. On pose

$\gamma: [0, 1] \rightarrow GL_n^+(\mathbb{R})$ bien définie, continue, $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma(1) = A$

$$t \mapsto \left(\prod_k R_k(t\lambda_k) \right) D_n((1-t) + t\det A) \left(\prod_l Q_l(t\mu_l) \right)$$

Et si $A \in GL_n^-(\mathbb{R})$, on relie $D_n(-1) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{pmatrix} \in GL_n^-(\mathbb{R})$ à A avec $(-1-t) + t\det A$.